INSTITUT FÜR INFORMATIK
Lehr- und Forschungseinheit für
Programmier- und Modellierungssprachen
Oettingenstraße 67, D–80538 München

Ludwig
Maximilians–
Universität
München

Zwei Modellgenerierungsverfahren für die Modallogik

Thomas Brüggemann

http://www.pms.informatik.uni-muenchen.de/publikationen
Forschungsbericht/Research Report PMS-FB-1998-7, April 1998

1 Zur Anwendung der Modellgenerierung für die Modallogik

Die Sprache der Modallogik eignet sich besonders gut zur Formalisierung des Verhaltens dynamischer Systeme .

Daraus ergeben sich uA. folgende Anwendungen:

- Planung in der KI (Reiter, 1998)
  Hier sind Probleme aus dem Bereich „Block's world" zu nennen.
- Diagnose in der KI (Gamper 1996/McIlraith, 1997/Reiter, 1987)
- Berechnung spezieller Semantiken für logische Programme mit Negation wie zB. die statische Semantik, die von Stephan Brass und Teodor Pzymusinky 1996 definiert wurde.
- Erfüllbarkeit, Erfülltheit und Simplifizierbarkeit von Integritätsbedingungen in Datenbanken
- Phänomene des Discource understanding, zB. „Mutual knowledge" (Fagin, Halpern, Moses, Vardi, 1996)

2 Argumente für ein direktes Verfahren im Gegensatz zu einem Übersetzungsverfahren

- Es gibt selbsreferente modale Formeln, die wichtige Operatoren der epistemischen Logik definieren und nicht in der modalen Prädikatenlogik der ersten Stufe ausdrückbar sind. Ein Beispiel hierfür ist der *common knowledge*-Operator.
- Es reicht oft nicht, zu wissen, daß eine Spezifikation erfüllbar ist, sondern man muß als Anwendere oft genug auch wissen, auf welche Weise, dh. durch die Erfüllung welcher Formeln welche Atome in das Modell aufgenommen werden mußten. Analoges gilt auch im Fall der Unerfüllbarkeit Diese Information geht bei einer Übersetzung oft verloren. (Snarks hilft hier weiter)
- Bei nicht-terminierenden Modellgenerierungsprozessen genügt dem Anwender oft schon ein endliches Teil-Tableau, um die Information, die er benötigt, zu extrahieren bzw. um die Zyklizität durch seine eigenen Kenntnisse von Tableau-Verfahren vorhersagen zu können. Dies geht aber nur, wenn die Formeln noch verständlich sind für den Anwender. (Snarks hilft hier weiter)

3 Ein erstes Verfahren zur Generierung modaler Modelle

3.1 Normalform-Syntax

Definition [Positive Formeln]

- Atome sind positiv.
- Sind P_1 und P_2 positiv und ist X eine endliche Variablenmenge, so sind auch $P_1 \wedge P_2$, $P_1 \vee P_2$, $\exists X : P_1$ und $\Diamond P_1$ positiv.

Definition [M-Formel]

- Jedes Atom ist eine M-Formel.
- $\Box F$ und $\Diamond F$ sind M-Formeln, wenn F eine M-Formel ist.
- $F_1 \wedge F_2$ und $F_1 \vee F_2$ sind M-Formeln, wenn F_1 und F_2 M-Formel sind.
- $\forall X : (P \rightarrow F)$ und $\exists X : (P \wedge F)$ sind M-Formeln, wenn F eine M-Formel ist, X eine endliche Menge von freien Variablen und P eine positive Formel.

Lemma
Zu jeder modalen Formel gibt es eine semantisch äquivalente M-Formel.

Bemerkung
Durch diese Normalisierungs werden tendentiell so viele Implikations-Subformeln mit so großen Rümpfen wie möglich erzeugt.

Wir betrachten nur geschlossene M-Formeln.

3.2 Bereichsbeschränkung

Übertragung des Konzeptes der Bereichsbeschränkung auf den Fall der M-Formeln mit folgenden Zielen:

- Bereichsbeschränkung soll eine modellerhaltende Transformation sein.
- Blinde Instantiierung allquantifizierter Formeln im Tableau unnötig (γ-Regel), Einschränkung des Suchraumes
- Ermöglichung der Modellgenerierung bzgl. der free/increasing/decreasing/uniform Domains-Semantik.

Die formalen Definitionen und Beweise zur Transformation in M-Formeln und zur Bereichsbeschränkung werden im Anhang A erklärt.

3.3 Der Tableau-Kalkül: Expansionsregeln

$satisfied$ bildet Tableau-Terme auf genau die maximal allgemeinen Substitutionen σ ab, so daß das bisher erzeugte Modell $P\sigma$ erfüllt.

$\vee$-Regel:

$$\frac{[F_1 \vee F_2 \ \ \mathbf{in}\ w]}{[F_1 \ \ \mathbf{in}\ w] \ \big| \ [F_2 \ \ \mathbf{in}\ w]}$$

$\wedge$-Regel:

$$\frac{[F_1 \wedge F_2 \ \ \mathbf{in}\ w]}{\begin{array}{c}[F_1 \ \ \mathbf{in}\ w]\\ [F_2 \ \ \mathbf{in}\ w]\end{array}}$$

Puhr-Regel:

$$\frac{[\forall X : (P \rightarrow F) \ \ \mathbf{in}\ w]}{[F\sigma \ \ \mathbf{in}\ w]}$$

falls $\sigma \in satisfied([P \ \ \mathbf{in}\ w])$

$\exists$-Regel:

$$\frac{[\exists\{x_1, \ldots, x_n\} : F \ \ \mathbf{in}\ w]}{[F[c_1/x_1] \ldots [c_n/x_n] \ \ \mathbf{in}\ w]}$$

$\Box$-Regel:

$$\frac{\begin{array}{c}[\Box F \ \ \mathbf{in}\ w]\\ R(w, w')\end{array}}{[F \ \ \mathbf{in}\ w']}$$

$\Diamond$-Regel:

$$\frac{[\Diamond F \ \ \mathbf{in}\ w]}{\begin{array}{c}R(w, c)\\ [F \ \ \mathbf{in}\ c]\end{array}}$$

3.3.1 Erweiterungen

- Erweiterte $\exists$-Regel (Sunna)
- Erweiterte $\Diamond$-Regel analog zu dem obigen Punkt

Die Bedeutung der Abbildung $satisfied_F$ und einige Zusammenhänge werden im Anhang B erklärt.

4 Der Situationskalkül

Der Situationskalkül ist ein Repräsentationsformalismus für Effekte von Aktionen in der KI (McCarthy, 1963).

Die Sprache des Situationskalküls ist eine mehrsortige prädikatenlogische Sprache mit Gleichheit, die folgendes beinhaltet:

Grundkonzepte:

1. Eine Sorte von Situationen sit mit Variablen $S_1, S_2, \ldots$
2. Eine Sorte von Fluenten flu mit Variablen $F_1, F_2, \ldots$
   (Fluenten sind Prädikatensymbolen vergleichbar)
3. Eine Sorte von Aktionen akt mit Variablen $A_1, A_2, \ldots$
4. Ein zweistelliges Funktionssymbol *result* der Sorte sit mit Argumenten der Sorten akt und sit
5. Ein zweistelliges Prädikatensymbol *holds* mit Argumenten der Sorten flu und sit

Nach McCarthy & Hayes (1969) ist die Interpretation eines Fluenten (zB. *raining*) eine Abbildung über der Menge der Situationen.

Es regnet in der Situation s_0: $raining(s_0)$

Durch Reifikation des Fluenten *raining* ergibt sich:

Es regnet in der Situation s_0: $holds(raining, s_0)$

Auf diese Weise ist eine Quantifikation über Situationen erststufig ausdrückbar.

4.1 Formeln des Situationskalküls

1. Effekt-Axiome
   beschreiben die Auswirkungen von Aktionen in Situationen und müssen daher das Funktionssymbol *result* beinhalten, das einen neuen Term beschreibt, die Resultat-Situation.

   (a) $\forall S : holds(loaded, result(load, S))$

   (b) $\forall S : (holds(loaded, S) \rightarrow \neg holds(alive, result(shoot, S)))$

2. Domain-Constraints
   beschreiben Zusammenhänge und Einschränkungen in einer einzigen Situation. Hier darf das Funktionssymbol *result* nicht vorkommen.

   (a) $\forall X, Y, Z, S :$
   $(holds(on(X, Y), S) \wedge holds(on(Y, Z), S) \rightarrow holds(on(X, Z), S))$

   (b) $\forall S : (\neg(holds(loaded, S) \wedge holds(Unloaded, S)))$

3. Beobachtungs-Sätze
   beschreiben einfache Beobachtungen mit Grundtermen als Situationen

   (a) $holds(alive, s_0)$

   (b) $\neg holds(loaded, s_0)$

4.2 Situationsbaum

$$
\begin{tikzcd}
 & & result(a_1, result(a_1, s_0)) & \cdots \\
 & result(a_1, s_0) \arrow[ur] \arrow[dr] & \vdots & \\
s_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \vdots & result(a_n, result(a_1, s_0)) & \cdots \\
 & result(a_n, s_0) & \ddots &
\end{tikzcd}
$$

Der Situationsbaum als „Gegen-Modell“ zu einer falschen Hypothese gibt optimalen Aufschluß über die Gründe und somit Anhaltspunkte für Anwender.
Die Aktionen sind teilweise sogar nicht-deterministisch.

Problem: Damit der Baum nicht unendlich groß wird, ist es oft nötig, Zyklen zu erzeugen (Graph statt Baum).

5 Das Frame-Problem

5.1 Das Yale-Shooting Scenario

1. Anfangssituation s_0
2. Fluenten-Konstanten *loaded* und *alive*
3. Aktions-Konstanten *load*, *wait* und *shoot*

Sei Σ die Menge der Effektaxiome und Beobachtungssätze von Seite 6.

Wir betrachten die Aktionsfolge $load - wait - shoot$ und fragen, ob ein imaginäres, anfangs lebendiges Opfer danach noch lebt.

$\Sigma \models \neg holds(alive, result(shoot, result(wait, result(load, s_0))))$?

Es gilt: $\Sigma \models holds(loaded, result(load, s_0))$
Aber: $\Sigma \not\models holds(loaded, result(wait, result(load, s_0)))$.
Somit: $\Sigma \not\models \neg holds(alive, result(shoot, result(wait, result(load, s_0))))$.

$\Rightarrow$ **Frame-Problem**

Mögliche Lösungen:

1. Zusätzliche Axiome, die implizite Informationen explizit machen: (Frame-Axiome)
   $\forall S : (holds(loaded, S) \rightarrow holds(loaded, result(wait, S)))$
   Baral 1997, Reiter 1991, Marek und Truszczynski 1994

   Auf diese Weise wird jedes Modellgenerierungs-verfahren sehr ineffizient, da viele Unnütze und uninteressante Informationen immer explizit erzeugt werden müssen, obwohl das einzig Interessante und Relevante nur die Änderungen sind.

2. Nicht-monotone Verfahren, die erst bei „Bedarf“ überprüfen. ob etwas dagegen spricht, daß ein Faktum, das in der „Vergangenheit“ wahr(unwahr) war, immer noch wahr(unwahr) ist.

6 Nicht-monotone Lösungen der KI

6.1 Änderungs-Circumscription (McCarthy, 1986)

Für ein neu eingeführtes Prädikat $affects$, das wahr sei genau dann, wenn eine Aktion A in einer Situation S Einfluß hat auf einen Fluenten F, betrachten wir folgendes Axiom:
$\forall A, F, S : (\neg affects(A, F, S) \rightarrow (holds(F, S) \leftrightarrow holds(F, result(A, S))))$

Wendet man nun den Circumscription-Operator mit Minimierung nur von $affects$ an, so erhält man folgende minimalen Modelle:
Sei $s_{0l} := result(load, s_0)$, $s_{0lw} := result(wait, s_{0l})$ und $s_{0lws} := result(shoot, s_{0lw})$.

$M_i \models holds(F, S)$

M_1:

$S \backslash F$	$loaded$	$alive$
s_0	false	true
s_{0l}	true	true
s_{0lw}	true	true
s_{0lws}	true	false

M_2:

$S \backslash F$	$loaded$	$alive$
s_0	false	true
s_{0l}	true	true
s_{0lw}	false	true
s_{0lws}	false	true

M_3:

$S \backslash F$	$loaded$	$alive$
s_0	false	true
s_{0l}	true	true
s_{0lw}	true	false
s_{0lws}	true	false

M_4:

$S \backslash F$	$loaded$	$alive$
s_0	false	true
s_{0l}	true	false
s_{0lw}	true	false
s_{0lws}	true	false

M_1 ist das intendierte Modell, alle anderen sind anormal, da sie spontane, dh. nicht erzwungene Änderungen aufweisen.

6.2 Chronologische Minimierung (Kautz/ Lifschitz/Shoham, 1986)

Prinzip: Alle Änderungen werden so lange wie möglich aufgeschoben

$M \leq_{chron} N :\Longleftrightarrow$ für alle d: Bis zur Tiefe d im Situationsbaum weist M weniger Änderungen auf als N.

Filterung bzgl. der Änderungs-Minimierung:
Die Modelle M_2, M_3 und M_4 sind nun nicht chronologisch minimal. Das intendierte Modell M_1 bleibt allein übrig.

Auch hier gibt es unintuitive Phänomene:

6.2.1 Stolen car scenario

Sei Σ die folgende Menge von Situationskalkül-Formeln:

$$\neg holds(stolen, s_0)$$
$$holds(stolen, result(wait, result(wait, s_0)))$$

Es gilt: $\Sigma \models_{chron.\ min.} \neg holds(stolen, result(wait, s_0))$,

obwohl beide Modelle möglich sein sollten:

$M_i \models holds(F, S)$

M_1:

$S \backslash F$	*stolen*
s_0	false
s_w	false
s_{ww}	true

M_2:

$S \backslash F$	*stolen*
s_0	false
s_w	true
s_{ww}	true

7 Kurzübersicht: Semantik von Datenbank-Updates

Sei A eine Formelmenge (Updates).

7.1 „syntax-unabhängig"

Problem: Es wird ausgegangen von deduktiv geschlossenen Formelmengen K, also Mengen, so daß jede Formel F, die aus K semantisch folgt, schon in K enthalten ist.

Alchourron, Gärdenfors und Makinson stellen ein System von Postulaten für die Glaubensrevision auf (1985).
Es werden drei Grund-Operationen auf Glaubensmengen festgelegt:

- *Expansion* $K_A^+ := \{y \mid K \cup \{A\} \vdash y\}$
- *Kontraktion* von A bringt eine Teilmenge von K, K_A^-, aus der A nicht abgeleitet werden kann.
- *Revision* fügt A zu K hinzu und bringt eine konsistente Formelmenge K_A^*, auch, wenn $K \vdash \neg A$.

Aufgrund der Levi-Identität: $K_A^* = \left(K_{\neg A}^-\right)_A^+$ genügt es, die Kontraktion zu betrachten.

7.1.1 Gärdenfors, 1988:

Zentral ist folgender Operator, der in verschiedenen Kontraktionsdefinitionen benutzt wird:
$K \perp A :=$ Menge der maximalen, deduktiv geschlossenen Teilmengen von K, die A nicht als Teilmenge enthalten.

$$K_A^- := \begin{cases} K' & \text{wenn } K' \in (K \perp \neg A) \text{ beliebig} \\ K & \text{sonst} \end{cases}$$

Gegenbeispiel: Sei K konsistent. Wenn $\neg A \in K$, so ist $B \vee \neg A \in K$ und $\neg B \vee \neg A \in K$ für alle Formeln B. Also ist entweder $B \vee \neg A \in K_{\neg A}^-$ oder $\neg B \vee \neg A \in K_{\neg A}^-$ für alle Formeln B. Also ist nach Levi-Identität entweder $B \in K_A^*$ oder $\neg B \in K_A^*$.

7.1.2 Winslett, 1990/Chen, 1995/McIlraith, 1997: (Possible worlds approach)

„Welten" werden durch Modelle/Interpretationen charakterisiert.

Winslett definiert ein Maß für die Ähnlichkeit von Modellen:
$M_1 \bigtriangleup M_2 :=$ Menge der Grundatome, die in M_1 und M_2
unterschiedliche Wahrheitswerte haben.

M_1 ist ähnlicher zu M als M_2, wenn: $M \bigtriangleup M_1 \subseteq M \bigtriangleup M_2$

$Incor(A, M) :=$ Menge der zu M maximal ähnlichen Modelle von A

$K_A^* := \bigcup_{M \in MOD(K)} Incor(A, M)$

7.2 „syntax-abhängig“

Pro-Argument: Effektive Berechenbarkeit

Contra-Argument: Dalal's Prinzip der Syntax-Irrelevanz (1988)
Führt die Revision semantisch äquivalenter Formelmengen zu semantisch äquivalenten Formelmengen?

7.2.1 Nebel, 1989: (belief base revision)

geht von einer Glaubensbasis (Formelmenge) S aus und benutzt die Grundoperationen von Alchourron, Gärdenfors und Makinson:

$S_A^- := \bigvee_{D \in (S \perp A)} D$

$S_A^* := S_A^- \wedge A$

Revision ist eindeutig.

Gegenbeispiel: $\{a, a \to b\}_b^* = b$

7.2.2 Ginsberg and Smith, 1988 (Possible worlds approach)

„Welten“ werden durch Formelmengen charakterisiert.

$S_A^* :=$ Menge der maximalen Teil-Formelmengen S', die konsistent sind, und für die gilt: $A \subseteq S' \subseteq S \cup A$

Revision ist mehrdeutig.

Gegenbeispiel: $\{a, b\}_{\neg b}^* = \{a, \neg b\}$, aber $\{a \wedge b\}_{\neg b}^* = \{\neg b\}$

7.2.3 Variante von Ginsberg and Smith: Cholvy, 1994

Berücksichtigung von deduktive Regeln/Integritätsbedingungen
S' darf auch Obermenge von S sein. Die symmetrische Mengendifferenz zwischen S und S' wird minimiert.
Formalisierung durch eine Art Modallogik in syntaktisch und semantisch reduzierter Form:

- nur $\Box$-Operatoren
- Erreichbarkeitsrelation ist festgelegt:
  Von einer initialen Welt sind alle anderen Welten in genau einem Schritt erreichbar. Sie repräsentieren alle Nachfolgewelten, die durch ein gegebenes Update erreichbar sind.

Keine Berechnungsvorschrift

7.3 Transaction logic programming

7.3.1 Bonner, Kiefer, 1993

Logik zur Formalisierung von Zustandsänderungen in logischen Programmen und Datenbanken
Ähnlich der Temporallogik, aber nicht so ausdrucksstark

Das Frame-Problem wird syntaktisch, nicht aber semantisch befriedigend gelöst: Die erzeugten Modelle enthalten auch unveränderte Informationen explizit.

8 Ein zweites Verfahren zur Generierung modaler Modelle

- *Possible worlds approach* von Winslett bzw. *Änderungs-Circumscription*-Ansatz von McCarthy
- Präferenz chronologisch minimaler Modelle (Aufschub von Änderungen solange wie möglich)
- Minimal-Repräsentation:

  Nur Fakten, die explizit in der Spezifikation stehen oder zur Modellkorrektheit notwendig sind, werden repräsentiert.

  Dadurch und wegen der Semantik werden die Modelle M_3 und M_4 (Seite 9) nicht repräsentiert. Nur M_1 und M_2 werden in dieser Reihenfolge „generiert".
- Zwei Paare modaler Operatoren:
  Lokale ($\Box_l$, $\Diamond_l$), die sich auf direkt erreichbare und globale ($\Box_g$, $\Diamond_g$), die sich auf grundsätzlich erreichbare Welten beziehen.

8.1 Vorüberlegungen: „Puhr-Regel-Anwendung unter Vorbehalt"

Wir wollen in dem zu konstruierenden Kalkül aus Effizienzgründen auf die explizite Repräsentation von Atomen, die weiterhin (un-)erfüllt sind, verzichten. Nur Atome, deren Wahrheitswert sich ändert, sollen explizit repräsentiert werden.

Generieren wir nun Modelle mit geeigneten Tableaux und ist im aktuellen Ast ein Atom A nicht enthalten (bzgl. einer Welt w), so gibt es zwei Möglichkeiten:

A ist in w von der aktuell generierten Interpretation

- nicht erfüllt.
- implizit erfüllt bzgl. der nicht-monotonen Semantik.

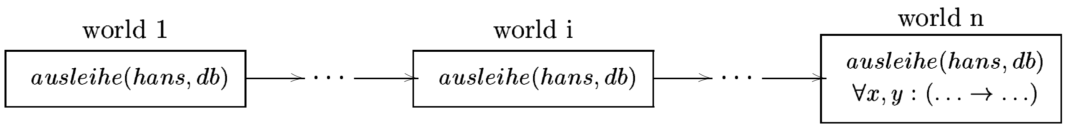
Dieser Unterschied muß berücksichtigt werden sowohl bei der Konstruktion von Modellen anhand offener Tableaux als auch bei der Anwendbarkeit der PUHR-Regel.

Wir betrachten folgende Beispiel-Spezifikation für $n > 1$:
$ausleihe(hans, db) \wedge \underbrace{\Diamond \ldots \Diamond}_{n} \forall x, y : (ausleihe(x, y) \rightarrow \Diamond\neg ausleihe(x, y))$

Sei $1 < i \leq n$. Wir betrachten folgende modale Interpretation:

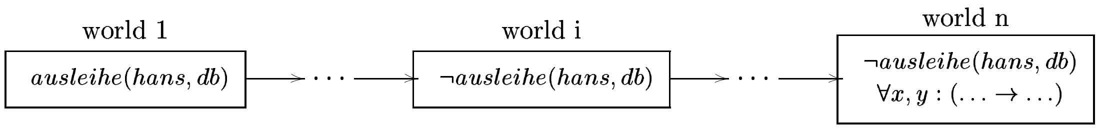
$$\begin{tikzcd} \text{world 1} & & \text{world i} & & \text{world n} \\ \boxed{ausleihe(hans, db)} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \boxed{} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \boxed{\forall x, y : (ausleihe(x, y) \rightarrow \Diamond\neg ausleihe(x, y))} \end{tikzcd}$$

In allen Welten i mit $1 < i \leq n$ sei das Atom $ausleihe(hans, db)$ nicht vorhanden, in der Welt 1 aber schon.
Die Frage ist folgende: Ist in der Welt n die Regel (die Implikationsformel) anwendbar?
Daraus entsteht die Frage: Ist das Atom $ausleihe(hans, db)$ in der Welt n erfüllt?
Unter Vorbehalt soll diese Frage positiv beantwortet werden, da wir *implizit* von folgender Interpretation ausgehen:



Die Regel in der Welt n ist demnach anwendbar und die Formel $\Diamond\neg ausleihe(hans, db)$ wird der Datenbasis der Welt n hinzugefügt.

Es könnte aber sein, daß im Verlauf der Expansion des Tableaux in der Welt i das Literal $\neg ausleihe(hans, db)$ hinzugefügt werden muß. Nun dürften wir nicht mehr *implizit* von obiger Interpretation ausgehen, sondern von folgender:



Die Regel in der Welt n ist nun nicht mehr anwendbar und wir müssen die bereits erfolgte Regelanwendung revidieren (Backtracking).

Um Konflikte dieser Art aufzudecken, müssen die Tableau-Terme der Menge
$U := \{[ausleihe(hans, db)\ \textbf{in}\ i] \mid 1 < i \leq n\}$
bei Anwendung der Regel dem Tableau hinzugefügt werden. Bleibt der aktuelle Tableau-Ast bei Hinzufügung von U konsistent, so feuert die Regel (commited choice).

8.2 Modifizierter Tableau-Kalkül

$satisfied_F$ bildet Tableau-Terme auf genau die maximal allgemeinen Substitutionen und Tableau-Term-Mengen (σ, U) ab, so daß das bisher erzeugte Modell $U \leftrightarrow P\sigma$ erfüllt.

Wir ersetzen die Puhr-Regel durch eine neue „Frame-Puhr-Regel“ und behalten ansonsten den Tableau-Kalkül von Seite 3 bei.

Wenn X eine Tableau-Term-Menge ist, so sei: $$ne(X) := \begin{cases} \top, & \text{wenn } X \neq \emptyset \\ \bot, & \text{wenn } X = \emptyset \end{cases}$$

Frame-Puhr-Regel:

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{[\forall X : (P \rightarrow F) \;\; \mathbf{in} \;\; w]} \\ \hline [F\sigma \;\; \mathbf{in} \;\; w] & [ne(U) \;\; \mathbf{in} \;\; w] \\ U & \end{array} \qquad \text{falls } (\sigma, U) \in satisfied_F([P \;\; \mathbf{in} \;\; w])$$

Die Bedeutung der Abbildung $satisfied_F$ und einige Zusammenhänge werden im Anhang C erklärt.

8.3 Beispiel 1: Das Yale-Shooting scenario

Übersetzung von

- Fluenten in Prädikate
- Aktionen in „Postaktions“-Prädikate
- Situationen entsprechen Welten und werden nicht übersetzt.

Spezifikation:

$$
\begin{array}{l}
alive \\
\neg loaded \\
\Box_g(loaded \rightarrow \Box_l(shot, alive \rightarrow \bot)) \\
\Diamond_l(loaded \wedge \Diamond_l(waited \wedge \Diamond_l shot))
\end{array}
$$

Vereinfachtes Tableau dazu:

$$
\begin{tikzcd}
 & \begin{array}{c}[alive\ \textbf{in}\ s_0] \\ [\neg loaded\ \textbf{in}\ s_0]\end{array} \arrow[d] & \\
 & \begin{array}{c}[loaded\ \textbf{in}\ s_{0l}] \\ [\Diamond_l(waited \wedge \Diamond_l shot)\ \textbf{in}\ s_{0l}]\end{array} \arrow[d] & \\
 & \begin{array}{c}[waited\ \textbf{in}\ s_{0lw}] \\ [\Diamond_l shot\ \textbf{in}\ s_{0lw}]\end{array} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\begin{array}{c}[loaded\ \textbf{in}\ s_{0lw}] \\ [\Box_l(shot, alive \rightarrow \bot)\ \textbf{in}\ s_{0lw}]\end{array} \arrow[d] & & [\top\ \textbf{in}\ s_{0lw}] \\
[shot\ \textbf{in}\ s_{0lws}] & &
\end{tikzcd}
$$

9 Anhang A: Zur Bereichsbeschränkung

$\top$ and $\bot$ are to be atoms. Let $EX := \{\Diamond\} \cup \{\exists x \,|\, x \text{ is an arbitrary variable}\}$ and $ALL := \{\Box\} \cup \{\forall x \,|\, x \text{ is an arbitrary variable}\}$. Let $dual : EX \cup ALL \to ALL \cup EX$ be a mapping with: $dual(\Diamond) := \Box$, $dual(\Box) := \Diamond$, $dual(\exists x) := \forall x$ and $dual(\forall x) := \exists x$ for all variables x.

Lemma 9.1 Let F be a modal formula. There are mappings t_{pos} and t_{neg} such that

1. If $t_{pos}(F)$ is defined, then $t_{pos}(F) \equiv F$ and $t_{pos}(F) = \bigvee_i \bigwedge_j k_{i,j}$ with all $k_{i,j}$ being positive modal formulas.
2. If $t_{neg}(F)$ is defined, then $t_{neg}(F) \equiv F$ and $t_{neg}(F) = \bigvee_i \bigwedge_j \neg k_{i,j}$ with all $k_{i,j}$ being positive modal formulas.

Beweis:
At first we define the two mappings:

- $t_{pos}(A) := A$ if A is an atom.
- $$t_{pos}(\neg A) := \bigvee_{j_1=1}^{m_1} \dots \bigvee_{j_n=1}^{m_n} \bigwedge_{i=1}^{n} k_{i,j_i} \qquad \text{if } t_{neg}(A) = \bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{m_i} \neg k_{i,j} \text{ and all } k_{i,j} \text{ are positive}$$
  $$t_{neg}(\neg A) := \bigvee_{j_1=1}^{m_1} \dots \bigvee_{j_n=1}^{m_n} \bigwedge_{i=1}^{n} \neg k_{i,j} \qquad \text{if } t_{pos}(A) = \bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{m_i} k_{i,j} \text{ and all } k_{i,j} \text{ are positive}$$
- $t_{pos}(A \vee B) := t_{pos}(A) \vee t_{pos}(B)$
  $t_{neg}(A \vee B) := t_{neg}(A) \wedge t_{neg}(B)$
- $t_{pos}(QA) := Qt_{pos}(A)$ if $Q \in EX$
- $t_{neg}(QA) := \neg dual(Q) t_{pos}(\neg A)$ if $Q \in ALL$

Item 1: Let $t_{pos}(F)$ be defined.
The proposition is proven by simultaneous induction on the structure of F.
The induction base holds by definition.
Induktionsschritt:
Fallunterscheidung according to the shape of F

Fall 1: $F = \neg A$
As $t_{pos}(F)$ is defined $t_{neg}(A)$ is defined, too. By induction hypothesis $t_{neg}(A) \equiv A$ and $t_{neg}(A) = \bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{m_i} \neg k_{i,j}$ with all $k_{i,j}$ being positive. Both propositions hold by definition of $t_{pos}(\neg A)$ and by distributivity of $\wedge$ and $\vee$ and vice versa.

Fall 2: $F = A \vee B$

As $t_{pos}(F)$ is defined either $t_{pos}(A)$ and $t_{pos}(B)$ are defined, too. By induction hypothesis $t_{pos}(A) \equiv A$, $t_{pos}(B) \equiv B$, $t_{pos}(A) = \bigvee_i \bigwedge_j k_{i,j}$ and $t_{pos}(B) = \bigvee_{i'} \bigwedge_{j'} k'_{i',j'}$. Hence: $t_{pos}(F) = t_{pos}(A) \vee t_{pos}(B) \equiv A \vee B = F$ and

$t_{pos}(F) = \bigvee_i \bigwedge_j k_{i,j} \vee \bigvee_{i'} \bigwedge_{j'} k'_{i',j'}$

Fall 3: $F = QA$ and $Q \in EX$

As $t_{pos}(F)$ is defined $t_{pos}(A)$ is defined, too. By induction hypothesis the proposition immediately holds.

Item 2 can be proven analogously to item 1.

□

Lemma 9.2 Jede modale Formel läßt sich zu einer semantisch äquivalenten M-Formel normalisieren.

Beweis:

Wir nehmen oBdA. an, daß alle Quantoren so weit wie möglich nach innen geschoben sind. Überflüssige Quantoren sollen nicht existieren. Wir definieren t induktiv:

- $t(A) := A$, wenn A ein Atom ist

- $$t(\neg A) := \begin{cases} A \to \bot, & \text{wenn } A \text{ ein Atom ist} \\ t(B), & \text{wenn } A = \neg B \\ t(\neg B) \wedge t(\neg C), & \text{wenn } A = B \vee C \\ Qt_{pos}(B) \to \bot, & \text{wenn } A = QB, Q \in EX \text{ und } t_{pos}(B) \text{ definiert ist} \\ t(dual(Q)\neg B), & \text{wenn } A = QB, Q \in EX \text{ und } t_{pos}(B) \text{ undefiniert ist} \\ & \text{oder } Q \in ALL \end{cases}$$

- $$t(A \vee B) := \begin{cases} t_{pos}(\neg A) \wedge t_{pos}(\neg B) \to \bot, & \text{wenn } t_{pos}(\neg A) \text{ und } t_{pos}(\neg B) \text{ definiert sind} \\ t_{pos}(\neg A) \to t(B), & \text{wenn nur } t_{pos}(\neg A) \text{ definiert ist} \\ t_{pos}(\neg B) \to t(A), & \text{wenn nur } t_{pos}(\neg B) \text{ definiert ist} \\ t(A) \vee t(B) & \text{sonst} \end{cases}$$

- $t(A \wedge B) := t(A) \wedge t(B)$

- $$t(QA) := \begin{cases} dual(Q)t_{pos}(\neg A) \to \bot, & \text{wenn } Q \in ALL \text{ und } t_{pos}(\neg A) \text{ definiert ist} \\ Qt(A), & \text{wenn } Q \in ALL \text{ und } t_{pos}(\neg A) \text{ undefiniert ist} \\ & \text{oder } Q \in EX \end{cases}$$

By this definition all the work is actually done. If a modal formula F is given then the proposition stating that the $t(F)$ is a M-formula being semantically equivalent to F can easily be shown by induction on the structure of F.

□

Definition 9.1 (Bereich)
Sei x eine Variable. *Bereichs*-Formeln werden induktiv wie folgt definiert:

1. Ein Atom ist ein Bereich für x, wenn x in ihm vorkommt.
2. $A_1 \vee A_2$ ist ein Bereich für x, wenn A_1 und A_2 Bereiche für x sind.
3. $A_1 \wedge A_2$ ist ein Bereich für x, wenn A_1 und A_2 positiv sind und mindestens eine der Formeln A_1 und A_2 ein Bereich für x ist.
4. $\exists y : A$ ist ein Bereich für x, wenn A ein Bereich für x ist und $x \neq y$.

Ist X eine endliche, nicht-leere Menge von Variablen, so ist eine Formel ein Bereich für X, wenn sie Bereich ist für alle Variablen in X.

> *Bemerkung:* Modale Operatoren sind nicht erlaubt innerhalb von Bereichs-Formeln, damit sich die Bereichsformeln bei der Interpretation nur auf den Domain-Bereich der aktuellen Welt und keiner anderen beziehen.

Definition 9.2 (bereichsbeschränkt)
Eine M-Formel F heißt *bereichsbeschränkt*, wenn für jede Teilformel $\forall X : (P \rightarrow G)$ bzw. $\exists X : (P \wedge G)$ von F (wobei P eine positive Formel ist) P ein Bereich für X ist.

Als wichtig hat sich herausgestellt, ob bei der Interpretation einer M-Formel ein Vorkommen einer Variablen in derselben Welt des Vorkommens quantifiziert ist oder nicht. Dafür wurde der Begriff „einheimisch“ gewählt:

Definition 9.3 (Modale Distanz/einheimisch/aktuell)
Es sei F eine M-Formel, F' eine Sub-M-Formel von F, t ein Term und x eine Variable in F.

1. Die *modale Distanz* eines Vorkommens von t in F (F' in F), symbolisch: $md(t, F)$ ($md(F', F)$) ist die Anzahl der modalen Operatoren auf dem Pfad von der Wurzel des Strukturbaum von F zu dem Vorkommen von t (F').
2. Ein Vorkommen von t in F heißt *aktuell* bzgl. F, wenn die modale Distanz von dem Vorkommen von t in F 0 beträgt.
3. Ein Vorkommen von x in F heißt *einheimisch* bzgl. F, wenn es aktuell ist bzgl. der kleinsten Teilformel von F, deren Hauptjunktor ein Quantor für x ist.
   Sei $Native_F(t)$ die Menge der Variablen, die in t einheimisch bzgl. Fvorkommen.

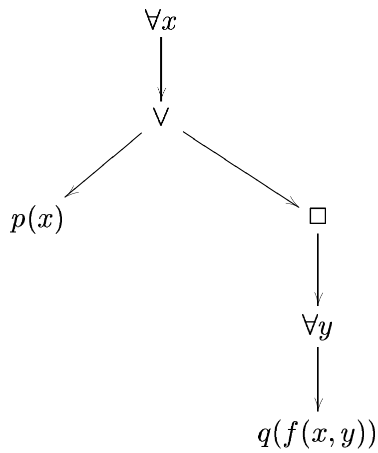
> *Bemerkung:* In Zukunft wollen wir den Index von *Native* weglassen, sofern keine Verwechslungsgefahr besteht.

Beispiel: $F_1 := \forall x : (p(x) \lor \Box \forall y : \neg q(f(x,y)))$

Innerhalb von F ist das Vorkommen von x im linken p-Atom einheimisch, nicht aber im rechten q-Atom. Das (einzige) Vorkommen von y ist einheimisch.

$Native_{F_1}(p(x)) = \{x\}$,
$Native_{F_1}(q(f(x,y))) = \{y\}$

Strukturbaum:



Da M-Formeln immer geschlossen sind, kann für jede Variable x entschieden werden, ob sie in einer M-Formel F existentiell oder universell quantifiziert ist, und für jedes Vorkommen einer Variablen in einer M-Formel F kann entschieden werden, ob es bzgl. F einheimisch ist oder nicht.

Für eine endliche, nicht-leere Menge von Variablen V sei

$$dom(V) := \bigwedge_{v \in V} dom(v)$$

Diese Notation dient nur der kompakten Formulierung von Bereichen. $dom(M)$ ist Bereich für M.

Für einen Term t, der keine Variable ist, sei

$$C_t := \forall Native(t) : (dom\,(Native(t)) \to dom(t))$$

Für das Beispiel der Formel F_1 ergibt sich nun:
$C_x = \top \to dom(x)$ für das x-Vorkommen im q-Atom
$C_{f(x,y)} = \forall y : (dom(y) \to dom(f(x,y)))$

Sei F eine beliebige geschlossene M-Formel ohne 0-stellige Prädikatensymbole. Sei $Terms(F)$ die Menge aller Terme in F und $ActGTerms(F)$ die Menge aller aller aktuellen Vorkommen von Grundtermen in F, erweitert um eine neue Konstante, falls es keine aktuellen Vorkommen von Grundtermen in F gibt.

Die Übersetzungsabbildung RR wird aufgeteilt in zwei Komponenten, eine strukturelle

Übersetzung der Formel RR_{form} und eine Übersetzung zur „Aufsammlung" der Terme RR_{term}.

$$RR(F) := RR_{form}(F) \wedge RR_{term}(F)$$

Zu den Komponenten von RR:

- Sei F Atom.
  $RR_{form}(F) := F$
  $RR_{term}(F) := dom(Terms(F))$
- Sei $\boldsymbol{M}$ ein modaler Operator. $\boldsymbol{M} \in \{\Box, \Diamond\}$
  $RR_{form}(\boldsymbol{M}F) := \boldsymbol{M}(RR(F) \wedge dom(ActGTerms))$
  $RR_{term}(\boldsymbol{M}F) := \top$
- Sei $\ * \in \{\wedge, \vee\}$
  $RR_{form}\,(F_1 * F_2) := RR_{form}(F_1) * RR_{form}(F_2)$
  $RR_{term}\,(F_1 * F_2) := RR_{term}(F_1) \wedge RR_{term}(F_2)$
- Seien X und Y Variablenmengen. Sei ferner Y maximal groß bzgl. der Eigenschaft, daß P ein Bereich für Y ist.
  $RR_{form}\,(\exists X : (P \wedge F)) := \exists X : (dom(X - Y) \wedge RR(P) \wedge RR(F))$
  $RR_{term}\,(\exists X : (P \wedge F)) := \top$
- Seien X und Y Variablenmengen. Sei ferner Y maximal groß bzgl. der Eigenschaft, daß P ein Bereich für Y ist.
  $RR_{form}\,(\forall X : (P \to F)) := \forall X : ((dom(X - Y) \wedge P) \to RR(F))$
  $RR_{term}\,(\forall X : (P \to F)) := \bigwedge_{t \in Terms(P)} \Box^{md(t,P)} C_t$

Für obiges Beispiel ergibt sich nun:
$RR(\forall x : (p(x) \vee \Box \forall y : \neg q(f(x,y)))) =$
$\forall x : (dom(x) \to p(x) \vee \Box(\forall y : \neg q(f(x,y)) \wedge \forall y' : (dom(y') \to dom(f(x,y')))))$

Sei S eine endliche, nicht-leere Menge von geschlossenen M-Formeln.

$$RR(S) := \begin{cases} \bigwedge_{F \in S} (RR(F) \wedge dom(ActGTerms)), & \text{wenn es eine nicht-bereichsbeschränkte M-Formel in } S \text{ gibt} \\ S & \text{sonst} \end{cases}$$

Da Satchmo nur positive Informationen explizit, negative jedoch ausschliesslich implizit repräsentiert, ist es wichtig, durch die Bereichsabeschränkungsabbildung widersprüchliche Formel-Mengen auf widersprüchliche bereichsabeschränkte Formel-Mengen

abzubilden.
Die unerfüllbare Formelmenge $\{p(a), \forall x : p(x), \forall x : \neg p(f(x))\}$ wird durch eine naive Übersetzung der Art $\{p(a), dom(a), \forall x : (dom(x) \rightarrow p(x)), \forall x : \neg p(f(x))\}$ in eine erfüllbare überführt. Das bedeutet, daß über alle Terme, die in negativen aber potentiell positiv erfüllten Literalen (hier: $p(f(a))$) vorkommen, Buch geführt werden muß. Diese Aufgabe wird nun gerade durch die Formeln C_t geleistet, und zwar durch eine zusätzliche Formel $\forall x : (dom(x) \rightarrow dom(f(x)))$. Gleiches gilt prinzipiell natürlich auch für die Terme in positiven Literalen. Da diese aber sowieso explizit verwaltet werden, ist dies unproblematisch.

Wenn Σ eine Signatur ist, die das Prädikatensymbol *dom* nicht enthält, so sei Σ_{+dom} die Erweiterung von Σ um das unäre Prädikat *dom*. Wenn $\mathcal{M} = (D, m)$ eine Σ-Struktur ist, so sei $\mathcal{M}_{+dom} := (D, m_{+dom}$ eine Σ_{+dom}-Struktur mit $m_{+dom}(x) := \begin{cases} D, & \text{wenn } x = dom \\ m(x), & \text{wenn } x \neq dom \end{cases}$
Entsprechend kann zu einer Σ_{+dom}-Struktur $\mathcal{M} = (D, m)$ eine Σ-Struktur $\mathcal{M}_{-dom} = (D, m_{-dom})$ definiert werden, wobei $m_{-dom} := m|_{\Sigma}$.
Für eine modale Σ-Interpretation Θ über einem Rahmen (W, R) mit $\Theta(w) = (\mathcal{M}_w, \mathcal{V}_w)$ für alle $w \in W$ sei Θ_{+dom} die modale Σ_{+dom}-Interpretation mit $\Theta_{+dom}(w) := ((\mathcal{M}_w)_{+dom}, \mathcal{V}_w)$ für alle $w \in W$. Analog kann man zu einer Σ_{+dom}-Interpretation Θ eine Σ-Interpretation Θ_{-dom} definieren.

Für Variablenmengen X und Domain-Elemente $d_1, \ldots, d_{card(X)}$ sollen Variablensubstitutionen der Form $\left[d_1/x_1, \ldots, d_{card(X)}/x_{card(X)}\right]$ durch $\left[\overline{d}/X\right]$ abgekürzt werden.

Das folgende Lemma soll zeigen, daß ein Modell einer Formelmenge S zu einem Modell von S nach Bereichsbeschränkung , $RR(S)$, transformiert werden kann.

Lemma 9.3 Sei $M := (W, R, \Theta)$ eine modale Σ-Interpretation und $w \in W$. Sei F M-Formel.

1. $\langle M_{+dom}, w\rangle \models RR_{term}(F)$
2. Wenn $\langle M, w\rangle \models F$, so $\langle M_{+dom}, w\rangle \models RR_{form}(F)$.
3. Wenn $\langle M, w\rangle \models F$, so $\langle M_{+dom}, w\rangle \models RR(F)$.

Beweis:
Die dritte Aussage ist als zentrale Aussage des Lemmas eine direkte Folgerung aus den ersten beiden.
Wir führen für die ersten beiden Behauptungen jeweils eine vollständige Induktion über den Aufbau von F durch.

zur 1. Behauptung:
Induktionsanfang: F ist Atom.

Die Induktionsbehauptung gilt in diesem Fall offensichtlich.

Induktionsschritt: Wir unterscheiden verschiedene Fälle je nach F's Hauptkonnektor:

Im Fall $F = F_1 * F_2$ mit $X \in \{\wedge, \vee\}$ gilt die Behauptung, da (W, R, Θ) eine modale Σ-Interpretation ist. Im Fall $F = \boldsymbol{M}G$ oder $F = \exists X : (P \wedge G)$ gilt die Behauptung trivial. Der einzig interessante Fall ist $F = \forall X : (P \rightarrow G)$:
Sei t ein Σ-Term der modalen Distanz d_t bzgl. P.
Es gilt: $\langle (W, R, \Theta_{+dom}), w\rangle \models \Box^{d_t} dom(t)$, da (W, R, Θ) eine modale Σ-Interpretation ist.
Somit folgt: $\langle (W, R, \Theta_{+dom}), w\rangle \models \Box^{d_t} C_t$.
zur 2. Behauptung:
Induktionsanfang: F ist Atom.
Die Induktionsbehauptung gilt in diesem Fall offensichtlich.

Induktionsschritt:
Fallunterscheidung nach F's Hauptkonnektor

Fall 1: $F = F_1 * F_2$ mit $X \in \{\wedge, \vee\}$
Die Behauptung gilt, da M eine modale Σ-Interpretation ist.

Fall 2: $F = \boldsymbol{M}G$
Die Behauptung folgt in diesem Fall mit der Induktionsvoraussetzung.

Fall 3: $F = \exists X : (P \wedge G)$
Nach Voraussetzung haben wir: $\langle M, w\rangle \models \exists X : (P \wedge G)$.
Also: $\left\langle M\left[\overline{d}/X\right], w\right\rangle \models P \wedge G$ für ein $\overline{d} \in D_w^{card(X)}$.
Nach Induktionsvoraussetzung und Aussage 1 dieses Lemmas:
$\left\langle M_{+dom}\left[\overline{d}/X\right], w\right\rangle \models RR(P) \wedge RR(G)$ für ein $\overline{d} \in D_w^{card(X)}$.
Nach Konstruktion von $M_{+dom}\left[\overline{d}/X\right]$ ist für jede Variablenmenge Y:
$\left\langle M_{+dom}\left[\overline{d}/X\right], w\right\rangle \models dom(X - Y)$.
Somit folgt die Behauptung.

Fall 4: $F = \forall X : (P \rightarrow G)$:
Nach Voraussetzung haben wir: $\langle M, w\rangle \models \forall X : (P \rightarrow G)$.
Also: $\left\langle M\left[\overline{d}/X\right], w\right\rangle \models P \rightarrow G$ für alle $\overline{d} \in D_w^{card(X)}$.
Da P eine Σ-Formel ist, ist für jede Grundinstanz P' von P:
$\left\langle M\left[\overline{d}/X\right], w\right\rangle \models P' \iff \left\langle M_{+dom}\left[\overline{d}/X\right], w\right\rangle \models P'$.
Mit Induktionsvoraussetzung folgt daraus: $\left\langle M_{+dom}\left[\overline{d}/X\right], w\right\rangle \models \forall X : (P \rightarrow RR_{form}(G))$.
Zusammen mit Punkt 1 dieses Lemmas folgt: $\left\langle M_{+dom}\left[\overline{d}/X\right], w\right\rangle \models \forall X : (P \rightarrow RR(G))$.
Nach Konstruktion von Θ_{+dom} gilt für jede Variablenmenge Y:
$\left\langle M_{+dom}\left[\overline{d}/X\right], w\right\rangle \models \forall X : dom(X - Y)$.

Daraus folgt die Behauptung.

□

Wir legen eine Notation fest:
Sei R eine binäre Relation über einer Menge W. Für eine Teilmenge W' von W sei: $R^0(W') := W'$ und $R^{i+1}(W') := \{w_{i+1} \mid \text{Es gibt ein } w_i \in R^i(W') \text{ mit } (w_i, w_{i+1}) \in R\}$. Im Fall, daß W' eine Einermenge ist, können die Mengenklammern auch weggelassen werden.

Im folgenden Lemma gehen wir von einer modalen Σ-Interpretation M aus, die ein minimales Modell von $RR(F)$ für eine M-Formel F ist in dem Sinne, daß für alle $w \in W$ die Interpretation jedes Prädikatensymbols minimal ist bzgl. Mengeninklusion. Das heißt, es werden keine Atome erfüllt, die nicht unbedingt erfüllt werden müssen.

Lemma 9.4
Sei F eine geschlossene Σ-M-Formel, $M := (W, R, \Theta)$ eine modale Σ-Interpretation, so daß für ein $w \in W$ $\langle M, w\rangle$ ein minimales Modell in obigem Sinne von $RR(F)$ ist.
Sei P atomare Subformel von F, P' eine Grundinstanz von P und t ein Term in P', so daß d_P die modale Distanz von P bzgl. F ist.
Es gilt: $\langle M, w\rangle \models \Box^{d_P}(P' \to dom(t))$.

Beweis:
Wir zeigen die Behauptung mit vollständiger Induktion über den Aufbau von F.
Induktionsanfang: F ist Atom. Also $P = F$ und $d_P = 0$.
Die Induktionsbehauptung gilt nach Voraussetzung $\langle M, w\rangle \models RR(F)$ zusammen mit der Definition von RR_{term}.
Induktionsschritt:
Fallunterscheidung nach dem Hauptkonnektor von F

Fall 1: $F = F_1 \wedge F_2$
OBdA. komme P in F_1 vor. Es gilt: $\langle M, w\rangle \models RR(F_1)$.
Also gibt es auch ein in obigem Sinne minimales Modell $\langle M_1, w\rangle$ von $RR(F_1)$, das kleiner ist als $\langle M, w\rangle$. Nach Induktionsvoraussetzung folgt: $\langle M_1, w\rangle \models \Box^{d_P}(P' \to dom(t))$.
Hieraus folgt die Induktionsbehauptung.

Fall 2: $F = F_1 \vee F_2$
OBdA. $\langle M, w\rangle \models RR(F_1)$. Wenn $\langle M, w\rangle \not\models RR(F_2)$, so muß es wegen der Voraussetzung zur Minimalität von $\langle M, w\rangle$ auch eine Subformel von F_1 mit P' als Grundinstanzen geben.
Weiter wie bei Fall 1.

Fall 3: $F = \Box F_1$
$\langle M, w\rangle \models RR(F)$.

Sei $w' \in R(w)$. Also: $\langle M, w' \rangle \models RR(F_1)$. $\langle M, w' \rangle$ ist für $RR(F_1)$ sogar ein minimales Modell in obigem Sinne. Die modale Distanz von P bzgl. F_1 beträgt $d_P - 1$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt für alle $w' \in R(w)$: $\langle M, w' \rangle \models \Box^{d_P - 1}(P' \to dom(t))$.
Also: $\langle M, w \rangle \models \Box^{d_P}(P' \to dom(t))$.

Fall 4: $F = \Diamond F_1$
$\langle M, w \rangle \models RR(F)$. Also für ein $w' \in R(w)$: $\langle M, w' \rangle \models RR(F_1)$.
$\langle M, w' \rangle$ ist für $RR(F_1)$ sogar ein minimlaes Modell in obigem Sinne. Die modale Distanz von P bzgl. F_1 beträgt $d_P - 1$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt für ein $w' \in R(w)$: $\langle M, w' \rangle \models \Box^{d_P - 1}(P' \to dom(t))$.
Somit: $\langle M, w \rangle \models \Diamond\Box^{d_P - 1}(P' \to dom(t))$.
Wegen Minimalität von $\langle M, w \rangle$ folgt sogar: $\langle M, w \rangle \models \Box^{d_P}(P' \to dom(t))$.

Fall 5: $F = \exists X : (R \wedge F_1)$
$\langle M, w \rangle \models RR(F)$.
Also gibt es $\overline{d} \in D_w^{card(X)}$ mit: $\langle M \left[\overline{d}/X\right], w \rangle \models R \wedge F_1$.
Weiter wie bei Fall 1.

Fall 6: $F = \forall X : (R \to F_1)$
$\langle M, w \rangle \models RR(F)$.
Also ist für alle $\overline{d} \in D_w^{card(X)}$: $\left\langle M \left[\overline{d}/X\right], w \right\rangle \models (R \to F_1)$.
Kommt P in F_1 vor, so gibt es ein minimales Modell $\langle M_{F_1}, w \rangle$ von $RR(F_1)$. Die Induktionbehauptung folgt aus der Induktionhypothese.

Kommt P in R vor, so kommt t negativ in F vor.
Sei $w_P \in R^{d_P}(w)$ und $\langle M, w_P \rangle \models P'$. Zu zeigen ist: $\langle M, w_P \rangle \models dom(t)$.

Wenn es eine Subformel G von F gibt mit $md(G, F) = d_P$ und $t \in ActGTerms(G)$ und $\langle M, w_P \rangle \models dom(ActGTerms(G))$, so gilt die Behauptung. Daher schließen wir diesen Fall in Zukunft aus. Also sei nun t Grundinstanz einer allquantifizierten negativ vorkommenden Variable von R.

Wir müssen eine vollständige Induktion über den Aufbau von t durchführen.

Induktionsanfang: t ist Konstante.
Da $\langle M, w \rangle$ minimales Modell von $RR(F)$ ist, muß es eine Grundinstanz P_2' eines positiv in $RR(F)$ vorkommenden Atoms P_2 der modalen Distanz d_P geben, die t als Term enthält, so daß: $\langle M, w_P \rangle \models P_2'$.
Wenn P_2 ein *dom*-Atom ist, so ist alles gezeigt, andernfalls handelt es sich um ein positiv in F vorkommendes Atom. Dann gilt wegen der Induktionshypothese bzgl. der Induktion über F: $\langle M, w_P \rangle \models P_2' \to dom(t)$.
Also: $\langle M, w_P \rangle \models dom(t)$.

Induktionsschritt: $t = f(t_1, \ldots, t_n)$
Es gibt ein $k \in \{1, \ldots, n\}$, so daß oBdA. die Terme $t_1, \ldots, t_k$

Grundinstanzen quantifizierter Variablen und $t_{k+1}, \ldots, t_n$ Grundterme sind.
Nach Definition von RR_{term} in diesem Fall:
$\langle M, w\rangle \models \Box^{d_P} \forall\{x_1, \ldots, x_k\} : (dom(\{x_1, \ldots, x_k\}) \to dom(t))$.
Nach Induktionshypothese bzgl. der Induktion über t ist für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$: $\langle M, w\rangle \models \Box^{d_P}(P' \to dom(t_i))$.
Also: $\langle M, w\rangle \models \Box^{d_P}(P' \to dom(t))$.
Mit $\langle M, w_P\rangle \models P'$ folgt: $\langle M, w_P\rangle \models dom(t)$.

□

Das folgende Lemma soll zeigen, daß in einer Welt w eines transformierten Σ_{+dom}-Modells die Elemente des Domains, die nicht in der Interpretation des dom-Prädikates $m_w(dom)$ enthalten sind, für das Modell irrelevant sind und daher weggelassen werden können.

Lemma 9.5 Sei F M-Formel.
Sei $M := (W, R, \Theta)$ modale Σ_{+dom}-Interpretation mit $\Theta(w) = (D_w, m_w)$ für alle $w \in W$. Sei die modale Σ_{+dom}-Interpretation $M_{m(dom)} := \left(W, R, \Theta_{m(dom)}\right)$ definiert durch: $\Theta_{m(dom)}(w) := (m_w(dom), m_w)$ für alle $w \in W$. Sei $w \in W$ und F M-Formel.

1. $\langle M, w\rangle \models RR_{term}(F)$ genau dann, wenn $\left\langle M_{m(dom)}, w\right\rangle \models RR_{term}(F)$.
2. $\langle M, w\rangle \models RR_{form}(F)$ genau dann, wenn $\left\langle M_{m(dom)}, w\right\rangle \models RR_{form}(F)$.
3. $\langle M, w\rangle \models RR(F)$ genau dann, wenn $\left\langle M_{m(dom)}, w\right\rangle \models RR(F)$.

Beweis:
Nach Konstruktion von $M_{m(dom)}$ gilt für alle $\overline{d} \in m_w(dom)^{card(X)}$ folgende Äquivalenz:

$$\left\langle M\left[\overline{d}/X\right], w\right\rangle \models dom(X) \iff \left\langle M_{m(dom)}\left[\overline{d}/X\right], w\right\rangle \models dom(X) \qquad (1)$$

Die dritte Aussage ist als zentrale Aussage des Lemmas eine direkte Folgerung der ersten beiden, die durch eine simultane Induktion über den Formelaufbau gezeigt werden.
zur ersten und zweiten Behauptung:
Induktionsanfang: F ist Atom.
Die erste Induktionsbehauptung gilt wegen Äquivalenz (1). Die zweite Induktionsbehauptung gilt offensichtlich.
Induktionsschritt:
Fallunterscheidung

Fall 1: $P = G_1 * G_2$ mit $* \in \{\wedge, \vee\}$
Beide Behauptungen folgen aus der Induktionsvoraussetzung.

Fall 2: $F = \exists X : (P \land G)$

Die erste Behauptung ist trivial. Zur zweiten Behauptung:
$\langle M, w\rangle \models RR_{form}(F)$ genau dann, wenn $\left\langle M\left[\overline{d}/X\right], w\right\rangle \models dom(X) \land RR(P) \land RR(G)$ für ein $\overline{d} \in D_w^{card(X)}$.
Aber: $\left\langle M\left[\overline{d}/X\right], w\right\rangle \models dom(X) \land RR(P) \land RR(G)$ für ein $\overline{d} \in D_w^{card(X)}$ genau dann, wenn $\left\langle M\left[\overline{d}/X\right], w\right\rangle \models dom(X) \land RR(P) \land RR(G)$ für ein $\overline{d} \in m_w(dom)^{card(X)}$.
Nach Induktionsvoraussetzung (bzgl. beider Aussagen) ist für alle $\overline{d} \in m_w(dom)^{card(X)}$:
$\left\langle M\left[\overline{d}/X\right], w\right\rangle \models RR(P) \land RR(G)$ genau dann, wenn $\left\langle M_{m(dom)}\left[\overline{d}/X\right], w\right\rangle \models RR(P) \land RR(G)$
Nimmt man alles zusammen und Äquivalenz (1) dazu, so folgt:
$\langle M, w\rangle \models RR_{form}(F)$ genau dann, wenn $\left\langle M_{m(dom)}, w\right\rangle \models RR_{form}(F)$

Fall 3: $F = \forall X : (P \to G)$

Zur ersten Behauptung:
Sei $t \in Terms(P)$. Da $C_t = RR_{form}(\forall Native(t) : (dom(Native(t)) \to dom(t)))$, kann man die Induktionsvoraussetzung bzgl. der zweiten Aussage anwenden, wenn man eine beliebige Welt $w' \in R^{md(t,P)}(w)$ anstatt w selbst betrachtet.

Zur zweiten Behauptung:
$\langle M, w\rangle \models RR_{form}(F)$ genau dann, wenn $\left\langle M\left[\overline{d}/X\right], w\right\rangle \models (dom(x) \land P) \to RR(G)$ für alle $\overline{d} \in D_w^{card(X)}$.
Aber: $\left\langle M\left[\overline{d}/X\right], w\right\rangle \models (dom(x) \land P) \to RR(G)$ für alle $\overline{d} \in D_w^{card(X)}$ genau dann, wenn $\left\langle M\left[\overline{d}/X\right], w\right\rangle \models (dom(x) \land P) \to RR(G)$ für alle $\overline{d} \in m_w(dom)^{card(X)}$.
Da P positive Subformel von F ist, gilt mit Lemma 9.4 und nach Konstruktion von Θ_{+dom} für alle $\overline{d} \in m_w(dom)^{card(X)}$:
$\left\langle M\left[\overline{d}/X\right], w\right\rangle \models P$ genau dann, wenn $\left\langle M_{m(dom)}\left[\overline{d}/X\right], w\right\rangle \models P$.
Nach Induktionsvoraussetzung (bzgl. beider Aussagen) ist für alle $\overline{d} \in m_w(dom)^{card(X)}$:
$\left\langle M\left[\overline{d}/X\right], w\right\rangle \models RR(G)$ genau dann, wenn $\left\langle M_{m(dom)}\left[\overline{d}/X\right], w\right\rangle \models RR(G)$
Nimmt man alles zusammen und Äquivalenz (1) dazu, so folgt:
$\langle M, w\rangle \models RR_{form}(F)$ genau dann, wenn $\left\langle M_{m(dom)}, w\right\rangle \models RR_{form}(F)$.

Fall 4: $F = \boldsymbol{M}G$

Die erste Behauptung ist trivial. Die zweite Behauptung gilt nach Induktionsvoraussetzung bzgl. der ersten beiden Aussagen und, da M modale Σ-Interpretation ist.

□

Basierend auf dem vorangegangenen Lemma können wir nun ein Lemma zeigen, das besagt, daß ein Σ_{+dom}-Modell einer Formelmenge nach Bereichsbeschränkung, $RR(S)$, zu einem Σ-Modell der ursprünglichen Formelmenge transformiert werden kann.

Lemma 9.6 Sei $M := (W, R, \Theta)$ eine modale Σ_{+dom}-Interpretation und $w \in W$. Sei F M-Formel.
Wenn $\langle M, w\rangle \models RR(F)$, so $\langle M_{-dom}, w\rangle \models F$.

Beweis:
Nach Aussage 3 des vorhergehenden Lemmas gibt es im Fall der Erfüllbarkeit von $RR(F)$ immer auch ein Modell über (W, R), so daß für alle $w \in W$: $m_w(dom) = D_w$ ist. $\langle M, w\rangle$ sei ein solches Modell. Also gilt für alle $d \in D_w$: $M[d/x], w \models dom(x)$. Wir zeigen die Behauptung mit vollständiger Induktion über den Formelaufbau.

Induktionsanfang: F ist Atom.
Die Induktionsbehauptung gilt offensichtlich.

Induktionsschritt:
Fallunterscheidung

Fall 1: $P = G_1 * G_2$ mit $* \in \{\wedge, \vee\}$
Die Behauptung folgt direkt aus der Induktionsvoraussetzung.

Fall 2: $F = \exists X : (P \wedge G)$ Sei Y die größte Variablenmenge, für die P ein Bereich ist.
Sei $\langle M, w\rangle \models \exists X : (dom(X - Y) \wedge P \wedge RR(G))$
Also gibt es ein $\overline{d} \in D_w^{card(X)}$ mit: $\left\langle M\left[\overline{d}/X\right], w\right\rangle \models dom(X - Y) \wedge P \wedge RR(G)$
Nach Induktionsvoraussetzung und, da P M-Formel über Σ ist, gibt es ein $\overline{d} \in D_w^{card(X)}$ mit: $\left\langle M_{-dom}\left[\overline{d}/X\right], w\right\rangle \models P \wedge G$
Also: $\langle M_{-dom}, w\rangle \models F$

Fall 3: $F = \forall X : (P \rightarrow G)$ Sei Y die größte Variablenmenge, für die P ein Bereich ist.
Sei $\langle M, w\rangle \models \forall X : ((dom(X - Y) \wedge P) \rightarrow RR(G))$.
Also ist für alle $\overline{d} \in D_w^{card(X)}$: $\left\langle M\left[\overline{d}/X\right], w\right\rangle \models ((dom(X - Y) \wedge P) \rightarrow RR(G))$.
Für alle $\overline{d} \in D_w^{card(X)}$ gilt nach Vereinbarung für M ($m_w(dom) = D_w$ für alle $w \in W$):
$\left\langle M\left[\overline{d}/X\right], w\right\rangle \models dom(X - Y)$
Somit gilt für alle $\overline{d} \in D_w^{card(X)}$:
Wenn $\left\langle M_{-dom}\left[\overline{d}/X\right], w\right\rangle \models P$, so $\left\langle M\left[\overline{d}/X\right], w\right\rangle \models dom(X - Y) \wedge P$.
Nimmt man die Voraussetzung dazu, so hat man für alle $\overline{d} \in D_w^{card(X)}$:
Wenn $\left\langle M_{-dom}\left[\overline{d}/X\right], w\right\rangle \models P$, so $\left\langle M\left[\overline{d}/X\right], w\right\rangle \models RR(G)$.
Für alle $\overline{d} \in D_w^{card(X)}$ ist nach Induktionsvoraussetzung:

Wenn $\left\langle M\left[\overline{d}/X\right], w\right\rangle \models RR(G)$, so $\left\langle M_{-dom}\left[\overline{d}/X\right], w\right\rangle \models G$.
Zusammen folgt für alle $\overline{d} \in D_w^{card(X)}$:
Wenn $\left\langle M_{-dom}\left[\overline{d}/X\right], w\right\rangle \models P$, so $\left\langle M_{-dom}\left[\overline{d}/X\right], w\right\rangle \models G$.
Also: $\langle M_{-dom}, w\rangle \models F$.

Fall 4: $F = \boldsymbol{M}G$
Die Behauptung folgt direkt aus der Induktionsvoraussetzung, da w variabel ist.

$\square$

10 Anhang B: Eine formale Darstellung des ersten Verfahrens

At first we fix a signature Σ. If a set of closed M-formulas is given Σ is to contain all the function and predicate symbols occurring in S. But furthermore it contains infinitely but countably many additional constant symbols which will be needed for the tableau-method we introduce.
Whenever we talk about *new* constants, we mean constants occurring neither in the originally given set of formulas nor anywhere else in the whole tableau constructed til now. The term *world* also is to denote a new constant in this sense.
We use a tableau method which is borrowed from Bry and Yahya [BY96]. The nodes of these tableaux are sets of terms of the form $[F \ \textbf{in}\ w]$ with F as a closed M-formula and w as a world or of the form $R(w_1, w_2)$ with w_1 and w_2 being worlds. In the forthcoming we will call these terms *tableau-terms* for the sake of brevity.
Before we start with the definition of the expansion rules we need an auxiliary term:

Definition 10.1 Let L be a set of tableau-terms.
L is said to be satisfiable if there is a modal interpretation $\mathcal{I}_L = (W_L, R_L, \Theta_L)$ such that:

- $W_L = \{w \mid [F \ \textbf{in}\ w] \in L \text{ for some M-formula } F\}$
- $R_L = \{(w_1, w_2) \mid R(w_1, w_2) \in L\}$
- $\langle \mathcal{I}, w\rangle \models A \iff [A \ \textbf{in}\ w] \in (L \cup \{[\top \ \textbf{in}\ w]\})$ for all ground atoms A.

In that case $\mathcal{I}_L$ is said to be a model of L.

Definition 10.2 (satisfaction of positive formulas) Let L be a set of tableau-terms and P be a positive formula.
$\sigma|_{\overline{X}}$ is to be the substitution σ, restricted to the set of variables not occurring in X.

- $satisfied(L, [\top \ \textbf{in}\ w]) := \{[]\}$
- If P is an atom (but not $\top$) then $satisfied([P \ \textbf{in}\ w]) := \{\sigma \mid [P\sigma \ \textbf{in}\ w] \in L\}$
- $satisfied([(P_1 \vee P_2) \ \textbf{in}\ w]) := satisfied([P_1 \ \textbf{in}\ w]) \cup satisfied([P_2 \ \textbf{in}\ w])$
- $satisfied([(P_1 \wedge P_2) \ \textbf{in}\ w]) := satisfied([P_1 \ \textbf{in}\ w]) \cap satisfied([P_2 \ \textbf{in}\ w])$
- $satisfied([(\exists X : P) \ \textbf{in}\ w]) := \{(\sigma|_{\overline{X}}) \mid \sigma \in satisfied([P \ \textbf{in}\ w])\}$
- $satisfied([(\Diamond P) \ \textbf{in}\ w]) := \{\sigma \mid \sigma \in satisfied([P \ \textbf{in}\ x]) \text{ and } R(w,x) \in L\}$

Example: Let $L := \{[p(a,b) \ \mathbf{in}\ 1], [p(b,b) \ \mathbf{in}\ 2], [q(a,b) \ \mathbf{in}\ 2], R(0,1), R(0,2)\}$.
$satisfied([p(x,y) \ \mathbf{in}\ 0]) = \{\}$,
$satisfied([p(x,y) \ \mathbf{in}\ 1]) = \{[a/x, b/y]\}$,
$satisfied([(p(x,y) \lor q(x,y)) \ \mathbf{in}\ 2]) = \{[a/x, b/y], [b/x, b/y]\}$,
$satisfied([\exists\{x\} : p(x,y) \ \mathbf{in}\ 1]) = \{[b/y]\}$,
$satisfied([\exists\{x,y\} : p(x,y) \ \mathbf{in}\ 1]) = \{[\,]\}$,
$satisfied([\Diamond p(x,y) \ \mathbf{in}\ 0]) = \{[a/x, b/y], [b/x, b/y]\}$,
$satisfied([\Diamond p(x,x) \ \mathbf{in}\ 0]) = \{[b/x]\}$

Lemma 10.1 Let P be a positive formula, L be a set of satisfiable tableau-terms and $\mathcal{I}_L$ be a model of L.
$\sigma \in satisfied([P \ \mathbf{in}\ w])$ if and only if $\langle \mathcal{I}, w\rangle \models P\sigma$

Proof:
base case of induction: P is an atom.
$\sigma \in satisfied([P \ \mathbf{in}\ w]) \iff$
$[P\sigma \ \mathbf{in}\ w] \in (L \cup \{[\top \ \mathbf{in}\ w]\}) \iff$
$\langle \mathcal{I}, w\rangle \models P\sigma$
induction step:
Distinction of cases according to the shape of P

case 1: $P = P_1 \lor P_2$
$\sigma \in satisfied([P \ \mathbf{in}\ w]) \iff$
$\sigma \in satisfied([P_1 \ \mathbf{in}\ w])$ or $\sigma \in satisfied([P_1 \ \mathbf{in}\ w]) \iff$
$\langle \mathcal{I}, w\rangle \models P_1\sigma$ or $\langle \mathcal{I}, w\rangle \models P_2\sigma \iff$
$\langle \mathcal{I}, w\rangle \models P\sigma$

case 2: $P = P_1 \land P_2$
$\sigma \in satisfied([P \ \mathbf{in}\ w]) \iff$
$\sigma \in satisfied([P_1 \ \mathbf{in}\ w])$ and $\sigma \in satisfied([P_1 \ \mathbf{in}\ w]) \iff$
$\langle \mathcal{I}, w\rangle \models P_1\sigma$ and $\langle \mathcal{I}, w\rangle \models P_2\sigma \iff$
$\langle \mathcal{I}, w\rangle \models P\sigma$

case 3: $P = \exists X : P_1$
$\sigma|_{\overline{X}} \in satisfied([P \ \mathbf{in}\ w]) \iff$
$\sigma \in satisfied([P_1 \ \mathbf{in}\ w]) \iff$
$\langle \mathcal{I}, w\rangle \models P_1\sigma \iff$
$\langle \mathcal{I}, w\rangle \models P\sigma|_{\overline{X}}$

case 4: $P = \Diamond P_1$
$\sigma \in satisfied([P \ \mathbf{in}\ w]) \iff$
$\sigma \in satisfied([P_1 \ \mathbf{in}\ x])$ and $R(w,x) \in L \iff$
$\langle \mathcal{I}, w\rangle \models P_1\sigma$ and $(w,x) \in R \iff$
$\langle \mathcal{I}, w\rangle \models P\sigma$

$\square$

Definition 10.3 (expansion rules) Let F, F_1, F_2 be M-formulas, P be a positve modal formula and w, w' be worlds. Furthermore let c and $c_1, \ldots, c_n$ be constant-symbols not occurring in the actual branch til now.
At first we have two classical expansion rules:

$\wedge$-rule:

$$\frac{[F_1 \wedge F_2 \ \textbf{in}\ w]}{\begin{array}{c}[F_1 \ \textbf{in}\ w]\\ [F_2 \ \textbf{in}\ w]\end{array}}$$

$\vee$-rule:

$$\frac{[F_1 \vee F_2 \ \textbf{in}\ w]}{[F_1 \ \textbf{in}\ w] \mid [F_2 \ \textbf{in}\ w]}$$

There are two rules for the handling of predicate logic quantifiers:

Puhr-rule: if $\sigma \in satisfied([P \ \textbf{in}\ w])$

$$\frac{[\forall X : (P \rightarrow F) \ \textbf{in}\ w]}{[F\sigma \ \textbf{in}\ w]}$$

$\exists$-rule:

$$\frac{[\exists\{x_1, \ldots, x_n\} : F \ \textbf{in}\ w]}{[F[c_1/x_1] \ldots [c_n/x_n] \ \textbf{in}\ w]}$$

Furthermore there are two rules for the handling of modal operators:

$\Box$-rule:

$$\frac{\begin{array}{c}[\Box F \ \textbf{in}\ w]\\ R(w, w')\end{array}}{[F \ \textbf{in}\ w']}$$

$\Diamond$-rule:

$$\frac{[\Diamond F \ \textbf{in}\ w]}{\begin{array}{c}R(w, c)\\ [F \ \textbf{in}\ c]\end{array}}$$

Definition 10.4 (M-tableau) Let S be a set of closed M-formulas. M-tableaux are trees with sets of closed M-formulas as their nodes. Therefore we can use the terminology existing for trees.
Let 0 be a new constant.

- The set $\{[F \ \textbf{in}\ 0] \mid F \in S\}$ is the M-start-tableau for S.

Let T be a M-tableau for S and L a leaf in T.

- If $[F_1 \wedge F_2 \ \textbf{in}\ w] \in L$ and $\{[F_1 \ \textbf{in}\ w], [F_2 \ \textbf{in}\ w]\} \not\subseteq L$ then the tree originating by appending the node $L \cup \{[F_1 \ \textbf{in}\ w], [F_2 \ \textbf{in}\ w]\}$ to L is a M-tableau for S.
- If $[F_1 \vee F_2 \ \textbf{in}\ w] \in L$ and $\{[F_1 \ \textbf{in}\ w], [F_2 \ \textbf{in}\ w]\} \cap L = \emptyset$ then the tree originating by appending the nodes $L \cup \{[F_1 \ \textbf{in}\ w]\}$ and $L \cup \{[F_2 \ \textbf{in}\ w]\}$ to L is a M-tableau for S.
- If $[\forall X : (P \rightarrow F) \ \textbf{in}\ w] \in L$, $\sigma \in satisfied([P \ \textbf{in}\ w])$ and $[F\sigma \ \textbf{in}\ w] \notin L$ then the tree originating by appending the node $L \cup \{[F\sigma \ \textbf{in}\ w]\}$ to L is a M-tableau for S.
- If $[\exists\{x_1, \ldots, x_n\} : F \ \textbf{in}\ w] \in L$ and $\{[(F[d_1/x_1] \ldots [d_n/x_n]) \ \textbf{in}\ w]\} \notin L$ for any terms $d_1, \ldots, d_n$ and $c_1, \ldots, c_n$ are constant symbols not occurring in L then the

tree originating by appending the node $L \cup \{[(F[c_1/x_1]\ldots[c_n/x_n])\ \mathbf{in}\ w]\}$ to L is a M-tableau for S.

- If $\{[\Box F\ \mathbf{in}\ w], R(w,w')\} \subseteq L$ and $[F\ \mathbf{in}\ w'] \notin L$ then the tree originating by appending the node $L \cup \{[F\ \mathbf{in}\ w']\}$ to L is a M-tableau for S.
- If $[\Diamond F\ \mathbf{in}\ w] \in L$ and there is no w' such that $\{R(w,w'), [F\ \mathbf{in}\ w']\} \subseteq L$ and c is a constant symbol not occurring in L then the tree originating by appending the node $L \cup \{R(w,c), [F\ \mathbf{in}\ c]\}$ to L is a M-tableau for S.

Remark: If $\mathcal{B}$ is a branch in a M-tableau then the union of all of its nodes is denoted by $\cup\mathcal{B}$. $\cup\mathcal{B}$ contains only closed M-formulas. But the underlying signature is the original signature extended by additional constant-symbol added because of applications of the $\Diamond$-rule in a quite obvious way. Therefore we won't mention it always.

At first two propositional examples, after that a first-order one.
For the sake of brevity we label every node only with the additional M-formulas.
Example:
Let $S := \{\Box(p \lor q), \Diamond(p \to \bot), \Diamond(q \to \bot)\}$.
This is an example for which many theorem provers (Ramsay for example) can only show satsifiability but can't generate a model.

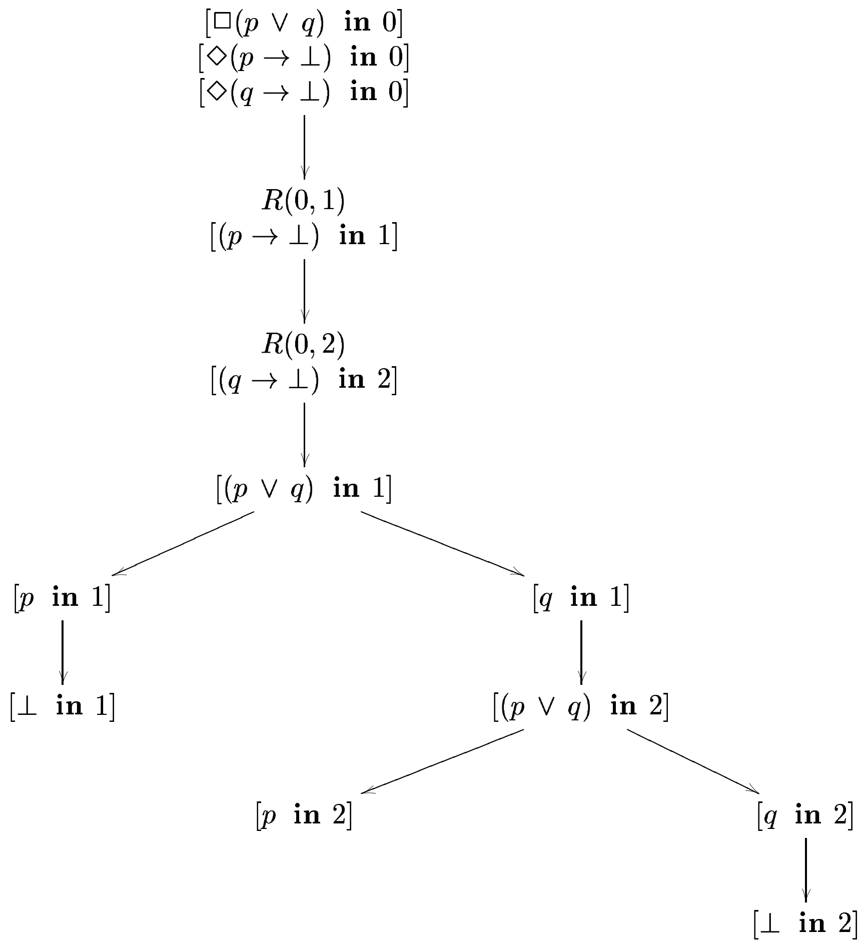


figure 1: There is only one open branch containing the model.

Example:
We look at two semantically equivalent sets S and S' of M-formulas which differ only according to the grade of normalization.
Let $S := \{\Diamond p, \top \to (\Box(p \to \bot)) \vee q\}$. The semanticall equivalent set $S' := \{\Diamond p, \Diamond p \to q\}$ contains only M-formulas with premises of implications made as 'big' as possible.

$$\begin{tikzcd}
 & \begin{array}{c}[\Diamond p \ \textbf{in}\ 0] \\ [\top \to (\Box(p \to \bot)) \vee q \ \textbf{in}\ 0]\end{array} \arrow[d] & \\
 & \begin{array}{c}R(0,1) \\ [p \ \textbf{in}\ 1]\end{array} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
{[p \to \bot \ \textbf{in}\ 1]} \arrow[d] & & {[q \ \textbf{in}\ 0]} \\
{[\bot \ \textbf{in}\ 1]} & &
\end{tikzcd}$$

figure 2: The right branch represents the model.

$$\begin{tikzcd}
\begin{array}{c}[\Diamond p \ \textbf{in}\ 0] \\ [\Diamond p \to q \ \textbf{in}\ 0]\end{array} \arrow[d] \\
\begin{array}{c}R(0,1) \\ [p \ \textbf{in}\ 1]\end{array} \arrow[d] \\
{[q \ \textbf{in}\ 0]}
\end{tikzcd}$$

figure 3: This tableau actually is the right branch of figure 2.

If we replace the formula $\Diamond p$ by $\Diamond \top$ either in S and S' then S' is saturated already, but not S'.

Example:

Let $S := \{\exists x : \Diamond\neg p(x), \Box\forall x : p(x)\}$ and $S' := \{\Diamond\exists x : \neg p(x), \Box\forall x : p(x)\}$
Classical tableau methods can't distinguish between the two sets S and S'. They proove both sets to be unsatisfiable although the first one is satisfiable. The reason for this phenomenon is that they loose the information, where a variable is quantified, by skolemization. Only for a semantics with increasing domains they work correctly, because in this case S is unsatisfiable, too. By handling the domains explicitely, as we do, the location of quantifcation remains for each variable. We transform both sets S and S' into range-restricted forms to oppose the originating tableaux:
$RR(S) = \{\exists x : (dom(x) \wedge \Diamond(p(x) \rightarrow \bot) \wedge dom(c_2)), \Box\forall x : (dom(x) \rightarrow p(x))\}$,
$RR(S') = \{\Diamond\exists x : (dom(x) \wedge (p(x) \rightarrow \bot)), \Box\forall x : (dom(x) \rightarrow p(x))\}$

$$
\begin{array}{c}
[\exists x : (dom(x) \wedge \Diamond((p(x) \rightarrow \bot) \wedge dom(c_2))) \ \textbf{in}\ 0] \\
[\Box\forall x : (dom(x) \rightarrow p(x)) \ \textbf{in}\ 0] \\
\downarrow \\
[dom(c_1) \ \textbf{in}\ 0] \\
\Diamond((p(c_1) \rightarrow \bot) \wedge dom(c_2)) \\
\downarrow \\
R(0,1) \\
[p(c_1) \rightarrow \bot \ \textbf{in}\ 1] \\
[dom(c_2) \ \textbf{in}\ 1] \\
\downarrow \\
[\forall x : (dom(x) \rightarrow p(x)) \ \textbf{in}\ 1] \\
\downarrow \\
[p(c_2) \ \textbf{in}\ 1]
\end{array}
$$

figure 4: Open tableau for $RR(S)$.

$$
\begin{array}{c}
[\Diamond\exists x : (dom(x) \wedge (p(x) \rightarrow \bot)) \ \textbf{in}\ 0] \\
[\Box\forall x : (dom(x) \rightarrow p(x)) \ \textbf{in}\ 0] \\
\downarrow \\
R(0,1) \\
[\exists x : (dom(x) \wedge (p(x) \rightarrow \bot)) \ \textbf{in}\ 1] \\
\downarrow \\
[dom(c_1) \ \textbf{in}\ 1] \\
[p(c_1) \rightarrow \bot \ \textbf{in}\ 1] \\
\downarrow \\
[\forall x : (dom(x) \rightarrow p(x)) \ \textbf{in}\ 1] \\
\downarrow \\
[p(c_1) \ \textbf{in}\ 1] \\
\downarrow \\
[\bot \ \textbf{in}\ 1]
\end{array}
$$

figure 5: Closed tableau for $RR(S')$.

Definition 10.5 (Satisfiability of M-tableaux)
Let S be a set of closed M-formulas, T a M-tableau for S and $\mathcal{B}$ a branch in T.

- $W_{\mathcal{B}} := \{w \mid [F \ \textbf{in}\ w] \in \cup\mathcal{B}$ for some M-formula $F\}$
  $R_{\mathcal{B}} := \{(w, w') \mid R(w, w') \in \cup\mathcal{B}\}$
  $\mathcal{F}_{\mathcal{B}} := (W_{\mathcal{B}}, R_{\mathcal{B}})$
  $D_{\mathcal{B}}(w) := \{t \mid t$ is a term occurring in an atom A with $[A \ \textbf{in}\ w] \in \cup\mathcal{B}\} \cup$
  $\{t \mid t$ is a groundterm occurring in S and in a M-formula F with $[F \ \textbf{in}\ w] \in \cup\mathcal{B}\}$

- $\mathcal{B}$ is called *satisfiable* if there is a modal interpretation $\mathcal{I} = (W, R, \Theta)$ such that
  - (W, R) is a superframe of $(W_{\mathcal{B}}, R_{\mathcal{B}})$
  - $D_w \supseteq D_{\mathcal{B}}(w)$ for all $w \in W_{\mathcal{B}}$ (D_w denotes the domain set of the structure $\Theta(w)$)
  - $[F \ \textbf{in}\ w] \in \cup\mathcal{B} \iff \langle\mathcal{I}, w\rangle \models F$

- T is called *satisfiable* if there is a satisfiable branch in T.

Remark: The frame $(\mathcal{W}_{\mathcal{B}}, R_{\mathcal{B}})$ is acyclic.

Lemma 10.2 If S is a set of closed M-formulas, $\mathcal{B}$ a branch in a M-tableau for S and $w \in W_{\mathcal{B}}$ then the following propositions hold:

1. If $[F \ \textbf{in}\ w] \in \mathcal{B}$ then F is a closed M-formula.
2. $D_{\mathcal{B}}(w)$ contains only groundterms.

Definition 10.6 (Fairness/Closedness) Let S be a set of closed M-formulas and T a M-tableau for S.

- A branch in T is called *saturated* if no expansion rule is applicable (any more).
- T is called *fair* if every branch of T is saturated.
- A branch $\mathcal{B}$ in T is called *closed* if $[\perp \ \textbf{in}\ w] \in \cup\mathcal{B}$ for some $w \in W_{\mathcal{B}}$, otherwise *open*.
- T is called *closed* if all branches in T are closed otherwise *open* .

Lemma 10.3 Let T be a M-tableau for a set of closed M-formulas S.
If T is satisfiable in an acyclic frame and if T' originates from T by an application of an expansion-rule then T' is satisfiable in an acyclic frame.

Proof:
Let T be satisfiable in an acyclic frame $\mathcal{F} = (W, R)$. So there is a satisfiable branch $\mathcal{B}$ in T. Without loss of generality let L be the leaf to which one or more nodes are appended by an application of an expansion-rule such that T' originates.
Let $\mathcal{I} = (W, R, \Theta)$ a modal interpretation with (W, R) being a superframe of $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ and $D_{\mathcal{B}}(w) \subseteq D_w$ (the domain of $\Theta(w)$) for all $w \in W_{\mathcal{B}}$ such that for all closed M-formulas F:

$$[F \;\; \mathbf{in} \; w] \in \cup\mathcal{B} \Longrightarrow \langle\mathcal{I}, w\rangle \models F \tag{2}$$

We have to show that there is a branch $\mathcal{B}'$ in T' and a modal interpretation $\mathcal{I}'$ such that for all closed M-formulas F:

$$[F \;\; \mathbf{in} \; w] \in \cup\mathcal{B}' \Longrightarrow \langle\mathcal{I}', w\rangle \models F \tag{3}$$

By this proposition the lemma is proven if it is additionally shown that the other conditions of satisfiability of a tableau also hold for $\mathcal{I}'$ which however will be quite obvious in each case.
We construct $\mathcal{I}'$ directly. The branch $\mathcal{B}'$ originates by the attachment of a node L to the branch $\mathcal{B}$. L will be specified in each case of the following
Distinction of cases regarding to the expansion rule by which T' originates from T

case 1: $\wedge$-rule:
By assumption of this case we have: $[F_1 \wedge F_2 \;\; \mathbf{in} \; w] \in L$.
$L' := L \cup \{[F_1 \;\; \mathbf{in} \; w], [F_2 \;\; \mathbf{in} \; w]\}$, $\mathcal{I}' := \mathcal{I}$.
By assumption 10: $\langle\mathcal{I}, w\rangle \models F_1 \wedge F_2$. Hence: $\langle\mathcal{I}, w\rangle \models F_1$ and $\langle\mathcal{I}, w\rangle \models F_2$.
Now proposition 11 holds.

case 2: $\vee$-rule:
By assumption of this case we have: $[F_1 \vee F_2 \;\; \mathbf{in} \; w] \in L$.
By assumption 10: $\langle\mathcal{I}, w\rangle \models F_1 \vee F_2$. Hence: $\langle\mathcal{I}, w\rangle \models F_1$ or $\langle\mathcal{I}, w\rangle \models F_2$.
$\mathcal{I}' := \mathcal{I}$. If $\langle\mathcal{I}, w\rangle \models F_1$ then $L' := L \cup \{[F_1 \;\; \mathbf{in} \; w]\}$ and proposition 11 holds.
Otherwise $\langle\mathcal{I}, w\rangle \models F_2$. Then $L' := L \cup \{[F_2 \;\; \mathbf{in} \; w]\}$, and proposition 11 holds, too.

case 3: Puhr-rule:
By assumption of this case we have:
$[\forall X : (P \rightarrow F) \;\; \mathbf{in} \; w] \in L$ and $\sigma \in \mathit{satisfied}([P \;\; \mathbf{in} \; w])$.
Let $L' := L \cup \{[F\sigma \;\; \mathbf{in} \; w]\}$, $\mathcal{I}' := \mathcal{I}$.
By assumption 10: $\langle\mathcal{I}, w\rangle \models \forall X : (P \rightarrow F)$.
As P is positive we have by means of lemma 11.1: $\langle\mathcal{I}, w\rangle \models P\sigma$.
So: $\langle\mathcal{I}, w\rangle \models F\sigma$ and proposition 11 holds.

case 4: $\exists$-rule:
By assumption of this case we have: $[\exists X : F \;\; \mathbf{in} \; w] \in L$.
Let $L' := L \cup \{[F[c_1/x_1] \ldots [c_n/x_n] \;\; \mathbf{in} \; w]\}$ for $c_1, \ldots, c_n$ being constants not

occurring in L.
By assumption 10: $\langle \mathcal{I}, w\rangle \models \exists X : F$.
So there are $d_1, \ldots, d_n$ with

$$d_i \in D_w \text{ for all } i \in \{1, \ldots, n\} \text{ and } \langle \mathcal{I}, w\rangle \models F[d_1/x_1]\ldots[d_n/x_n] \tag{4}$$

Now a new interpretation $\mathcal{I}' := (W, R, \Theta')$ can be constructed, such that, if $\Theta'(w) = (D_w, m_w)$ for all $w \in W$, then $m_w(c_i) = d_i$ for all $i \in \{1, \ldots, n\}$ in the world w. As all c_i's are perfectly new and occurr nowhere, no problems can arise by this operation. $\mathcal{I}'$ is only slightly different form $\mathcal{I}$. Proposition 11 holds immediately.

case 5: $\Box$-rule:
By assumption of this case we have: $\{[\Box F \textbf{ in } w], R(w, w')\} \subseteq L$.
$L' := L \cup \{[F \textbf{ in } w']\}$, $\mathcal{I}' := \mathcal{I}$.
By assumption 10: $\langle \mathcal{I}, w\rangle \models \Box F$.
As (W, R) is superframe of $(W_\mathcal{B}, R_\mathcal{B})$ we have: $(w, w') \in R$. So: $\langle \mathcal{I}, w'\rangle \models F$.
Now proposition 11 holds.

case 6: $\Diamond$-rule:
By assumption of this case we have: $[\Diamond F \textbf{ in } w] \in L$.
Let c be a constant symbol not occurring in L.
$L' := \{R(w, c), [F \textbf{ in } c], [\top \textbf{ in } c]\}$.
$W_{\mathcal{B}'} = W_\mathcal{B} \cup \{c\}$ and $R_{\mathcal{B}'} = R_\mathcal{B} \cup \{(w, c)\}$.
By assumption 10 we have: $\langle \mathcal{I}, w\rangle \models \Diamond F$.
Hence there must be a world $w_F \in W$ such that:

$$(w, w_F) \in R \text{ and } \langle \mathcal{I}, w_F\rangle \models F \tag{5}$$

Again a new modal interpretation $\mathcal{I}'$ can be constructed with the only aim to rename the world 'w_F' to 'c'. So on one hand the analogon of proposition 10 holds:

$$[F \textbf{ in } w] \in \cup\mathcal{B} \Longrightarrow \langle \mathcal{I}', w\rangle \models F \tag{6}$$

and on the other hand the analogon of proposition 13 holds:

$$(w, c) \in R \text{ and } \langle \mathcal{I}', c\rangle \models F \tag{7}$$

With the propositions 14 and 15 the proposition 11 holds.

$\Box$

If we would allow negations or generalizing quantifiers in the body of M-formulas, then there were unsatisfiable sets of closed M-formulas with an open M-tableau (possibly among others being closed) for them. Look at the example:
$S := \{(\neg p(a)) \rightarrow p(b), p(a), p(b) \rightarrow \bot\}$.

A conclusion of the lemma is the following

Theorem 10.1 (Refutation correctness) Let S be a set of closed M-formulas. If there is a closed M-tableau for S then S is unsatisfiable in every acyclic frame.

Proof:
Let S be satisfiable in an acyclic frame. So the start-tableau for S is satisfiable in an acyclic frame. Every M-tableau for S originates by a sequence of applications of expansion rules to the start-tableau for S. Therefore every M-tableau for S must be satisfiable in an acyclic frame by lemma 11.3 and hence open.

$\square$

Now we come back to our signature Σ fixed at the beginning. Let T be an open M-tableau for S. Suppose that $\mathcal{B}$ is an open branch in T. We describe a technique to construct a modal Σ-interpretation $\mathcal{I}_{\mathcal{B}}$ starting with $\mathcal{B}$. Since Lemma 11.2, item 1 all atoms occurring in $\cup\mathcal{B}$ are ground atoms.
We have to define a Σ-structure (D_w, m_w) for all $w \in W_{\mathcal{B}}$. D_w is to be $D_{\mathcal{B}}(w)$ (see definition 11.5) if it is not empty. Otherwise we define D_w to be the set of an arbitrary new constant c_w in Σ which doesn't occurr anywhere else in $\mathcal{B}$. If S is the result of a range-restriction transformation, $D_{\mathcal{B}}(w)$ can't be empty by construction. $D_{\mathcal{B}}(w)$ contains only groundterms by construction and item 2. Furthermore we have to fix the interpretations of the function and predicate symbols for a fixed world $w \in W$.
Let f be a function symbol in Σ with arity n.
$$m_w(f) := \begin{cases} f(t_1, \dots t_n) & \text{if } f(t_1, \dots t_n) \in D_{\mathcal{B}}(w) \\ a & \text{if } f(t_1, \dots t_n) \notin D_{\mathcal{B}}(w) \text{ and } a \text{ is an arbitrary constant in } D_{\mathcal{B}}(w) \end{cases}$$
Let p be a predicate symbol in Σ with arity n.
$m_w(p) := \{(t_1, \dots, t_n) \mid [p(t_1, \dots, t_n) \ \mathbf{in}\ w] \in \cup\mathcal{B}\}$.

Now we can define $\Theta_{\mathcal{B}}(w)$ to be the modal interpretation consisting of the Σ-structure (D_w, m_w) and an arbitrary Σ-assignment for all $w \in W_{\mathcal{B}}$: $\mathcal{I}_{\mathcal{B}} := (W_{\mathcal{B}}, R_{\mathcal{B}}, \Theta_{\mathcal{B}})$.

Lemma 10.4 (model correctness) Let S be a set of closed M-formulas. If T is an open fair M-tableau for S then S is satisfiable in an acyclic frame.

Proof:
Let T be an open fair M-tableau S, 0 the initial world and $\mathcal{B}$ an open branch in T. Because of T's fairness $\mathcal{B}$ is saturated regarding to S. We show now: $\langle \mathcal{I}_{\mathcal{B}}, 0 \rangle \models S$.

The proposition of the lemma is a conclusion of the following proposition which will be proven with induction on the structure of a M-formula F:

$$[F \ \mathbf{in}\ w] \in \cup\mathcal{B} \Longrightarrow \langle \mathcal{I}_{\mathcal{B}}, w \rangle \models F$$

base case of induction: F is an atom.
A is a ground atom because of lemma 11.2, proposition 1. The proposition holds by $\mathcal{I}_{\mathcal{B}}$'s definition.

induction step:
Distinction of cases regarding to the structure of F

case 1: $F = F_1 \wedge F_2$
$[F \textbf{ in } w] \in \cup\mathcal{B}$
$\Longrightarrow$ ($\wedge$-rule, saturatedness)
$[F_1 \textbf{ in } w] \in \cup\mathcal{B}$ and $[F_2 \textbf{ in } w] \in \cup\mathcal{B}$
$\Longrightarrow$ (induction hypothesis)
$\langle \mathcal{I}_{\mathcal{B}}, w\rangle \models F_1\sigma$ and $\langle \mathcal{I}_{\mathcal{B}}, w\rangle \models F_2\sigma$
$\Longrightarrow \langle \mathcal{I}_{\mathcal{B}}, w\rangle \models F$

case 2: $F = F_1 \vee F_2$
analogously to case 2.

case 3: $F = \forall\{x_1, \ldots, x_m\} : (P \rightarrow F')$
$[F \textbf{ in } w] \in \cup\mathcal{B}$
$\Longrightarrow$ (Puhr-rule, saturatedness)
for all $\sigma \in \mathit{satisfied}([P \textbf{ in } w])$: $[F'\sigma \textbf{ in } w] \in \cup\mathcal{B}$
$\Longrightarrow$ (lemma 11.1)
for all substitutions σ with: $\langle \mathcal{I}_{\mathcal{B}}, w\rangle \models P\sigma$ we have: $[F'\sigma \textbf{ in } w] \in \cup\mathcal{B}$
$\Longrightarrow$ (induction hypothesis)
for all substitutions σ with: $\langle \mathcal{I}_{\mathcal{B}}, w\rangle \models P\sigma$ we have: $\langle \mathcal{I}_{\mathcal{B}}, w\rangle \models F'\sigma$
$\Longrightarrow \langle \mathcal{I}_{\mathcal{B}}, w\rangle \models F$

case 4: $F = \exists\{x_1, \ldots, x_m\} : (F')$
$[F \textbf{ in } w] \in \cup\mathcal{B}$
$\Longrightarrow$ ($\exists$-rule, saturatedness)
there are constants $c_1, \ldots, c_m$ with: $[F'[c_1/x_1] \ldots [c_m/x_m] \textbf{ in } w] \in \cup\mathcal{B}$
$\Longrightarrow$ (definition of $D_{\mathcal{B}}(w)$ induction hypothesis)
there are constants $c_1, \ldots, c_m \in D_{\mathcal{B}}(w)$ with: $\langle \mathcal{I}_{\mathcal{B}}, w\rangle \models F'[c_1/x_1] \ldots [c_m/x_m]$
$\Longrightarrow \langle \mathcal{I}_{\mathcal{B}}, w\rangle \models F$

case 5: $F = \Box F'$
$[F \textbf{ in } w] \in \cup\mathcal{B}$
$\Longrightarrow$ ($\Box$-rule, saturatedness)
for all $w' \in W_{\mathcal{B}}$: $(R(w, w') \in \cup\mathcal{B} \Rightarrow [F' \textbf{ in } w'] \in \cup\mathcal{B})$
$\Longrightarrow$ (definition of $R_{\mathcal{B}}$)
for all $w' \in W_{\mathcal{B}}$: $((w, w') \in R_{\mathcal{B}} \Rightarrow [F' \textbf{ in } w'] \in \cup\mathcal{B})$
$\Longrightarrow$ (induction hypothesis)
for all $w' \in W_{\mathcal{B}}$: $((w, w') \in R_{\mathcal{B}} \Rightarrow \langle \mathcal{I}_{\mathcal{B}}, w'\rangle \models F')$
$\Longrightarrow \langle \mathcal{I}_{\mathcal{B}}, w\rangle \models F$

case 6: $F = \Diamond F'$
analogously to case 5

$\Box$

A conclusion of this lemma is the following

Theorem 10.2 (refutation completeness) Let S be a set of closed M-formulas. If S is unsatisfiable in every acyclic frame then there is no open fair M-tableau for S.

To get a more general result we want to show that a set of closed M-formulas is satisfiable iff it is satisfiable in an acyclic frame.

Let a set of worlds W be given.

We want to introduce a mapping $level$ which only aim it is to generate new names. $level^0 := id_W$ und $level^i(W) \cap level^j(W) = \emptyset$ for every i, j with $i \neq j$.

Definition 10.7 (reachability tree)
Let $G = (W, R)$ be a graph, $w \in W$ and $i \in \mathcal{N}$.

- The reachability tree of heigth 1 and level i of w in G is the tree $RT_1^i(w) := (W_1^i, R_1^i)$, $W_1^i := \{level^{i-1}(w)\} \cup \{level^i(w') \mid (w, w') \in R\}$ and $R_1^i := \{(level^{i-1}(w), level^i(w')) \mid (w, w') \in R\}$.
- The reachability tree of heigth 0 of w in G, $RT^0(w)$, is the tree $(\{w\}, \emptyset)$.
- The reachability tree of heigth $i+1$ of w in G, $RT^{i+1}(w)$, is the tree originating from $RT^i(w)$ by substituting each of its leaves b by the reachability tree of heigth 1 and level $i+1$ of b in G, $RT_1^{i+1}(b)$.

Lemma 10.5 Let S be a set of closed M-formulas, $\mathcal{I} = (W, R, \Theta)$ a modal interpretation and $w \in W$.

If $\langle \mathcal{I}, w \rangle \models S$ then there is a modal interpretation $\mathcal{I}'$ on an acyclic frame such that: $\langle \mathcal{I}', w \rangle \models S$.

Beweis:
Let $s := mdeg(S)$ be the modal grade of S.
We prove the proposition by induction on the number of cycles in (W, R).
Induktionsanfang: There are no cycles in (W, R).
$\mathcal{I}' := \mathcal{I}$. Nothing is left to show.

Induktionsschritt: There are $n+1$ cycles in (W, R).
Let $w_{start}, \ldots, w_{end}, w_{start}$ be a cycle in (W, R). Wir construct a new interpretation $\mathcal{I}' := (W', R', \Theta')$ with $w \in W'$. The idea is that the frame (W', R') has not more than n cycles. We replace the node w_{end} by the reachability tree of height s of w_{end} in G, (W_s, R_s), and delete the vertex (w_{end}, w_{start}). $W \cap W_s = \{w_{end}\}$.
$W' := W \cup W_s, \quad R' := R - \{(w_{end}, w_{start})\} \cup R_s$.
The frame (W', R') has not more than n cycles.
We define Θ' as a mapping from W' to the set of modal interpretations:

$\Theta'(level^i(w)) := \Theta(w)$ for all $i \in \{1, \ldots, s\}$ and $w \in W$. In order to show the proposition of the lemma we have to show the following proposition for all $w \in W$:

$$\langle (W, R, \Theta), w \rangle \models F \iff \langle (W', R', \Theta'), w \rangle \models F \tag{8}$$

Let F be a M-formula in S with $f := mdeg(F) \leq s$ and G a M-subformula of F with $g := mdeg(G)$. At first we show with induction on the structure of G:

$$\left\langle (W', R', \Theta'), level^{f-g}(w_{end}) \right\rangle \models G \iff \langle (W, R, \Theta), w_{end}) \rangle \models G \tag{9}$$

Induktionsanfang: G is an atom. So $g = 0$ and $f - g = f$.
$\left\langle (W', R', \Theta'), level^f(w_{end}) \right\rangle \models G \iff$
$\left(\Theta'(level^f(w_{end}))\right) \models G \stackrel{\text{definition of } \Theta'}{\iff}$
$(\Theta(w_{end})) \models G \iff$
$\langle (W, R, \Theta), w_{end} \rangle \models G$
Induktionsschritt:
Fallunterscheidung regarding to the shape of G

Fall 1: $G = \neg A$
$\left\langle (W', R', \Theta'), level^{f-g}(w_{end}) \right\rangle \models G \iff$
$\left\langle (W', R', \Theta'), level^{f-g}(w_{end}) \right\rangle \not\models A \stackrel{\text{by ind. hyp.}}{\iff}$
$\langle (W, R, \Theta), w_{end}) \rangle \not\models A \iff$
$\langle (W, R, \Theta), w_{end}) \rangle \models G$

Fall 2: $G = A \vee B$
analogously to case 2.

Fall 3: $G = \forall x : A$
analogously to case 2.

Fall 4: $G = \Box A$
If $a = mdeg(A)$ then $a = g - 1$ and $f - a = f - g + 1$.
$\left\langle (W', R', \Theta'), level^{f-g}(w_{end}) \right\rangle \models G \iff$
$\left\langle (W', R', \Theta'), level^{f-a}(w'_{end}) \right\rangle \models A$
for all $level^{f-a}(w'_{end}) \in R'(level^{f-g}(w_{end})) \stackrel{\text{by ind. hyp.}}{\iff}$
$\langle (W, R, \Theta), w'_{end}) \rangle \models A$
for all $level^{f-a}(w'_{end}) \in R'(level^{f-g}(w_{end})) \stackrel{\text{by def. of } R'}{\iff}$
$\langle (W, R, \Theta), w'_{end}) \rangle \models A$ for all $w'_{end} \in R(w_{end}) \iff$
$\langle (W, R, \Theta), w_{end}) \rangle \models G$

The induction ends and the proposition 9 is proven.

Now we show proposition 8 with induction on $mdeg(F)$.

Induktionsanfang: $mdeg(F) = 0$. F contains no modal operators.
The proposition holds by definition of Θ'.

Induktionsschritt: $F = \Box A$ with $mdeg(A) = mdeg(F) - 1$.
If $w = w_{end}$ the proposition is a conclusion of proposition 9. Otherwise we have:

$$\langle (W, R, \Theta), w \rangle \models F \iff$$
$$\langle (W, R, \Theta), w' \rangle \models A \quad \text{for all } w' \in R(w) \overset{\text{by ind. hyp.}}{\iff}$$
$$\langle (W', R', \Theta'), w' \rangle \models A \quad \text{for all } w' \in R(w) \overset{\text{by def. of } R'}{\iff}$$
$$\langle (W', R', \Theta'), w' \rangle \models A \quad \text{for all } w' \in R'(w) \iff$$
$$\langle (W', R', \Theta'), w \rangle \models F$$

The proposition 8 and hence the proposition of the whole lemma is proven.

□

A conclusion is the following

Lemma 10.6 Let S be a set of closed M-formulas.
S is satisfiable iff S is satisfiable in an acyclic frame.

With the theorems 11.1 and 10.2 together with the preceding lemma we get the following

Corollary 10.1 Let S be a set of closed M-formulas.
S is unsatisfiable iff there is no open fair M-tableau for S.

11 Anhang C: Eine formale Darstellung des ersten Verfahrens

At first we fix a signature Σ. If a set of closed M-formulas is given Σ is to contain all the function and predicate symbols occurring in S. But furthermore it contains infinitely but countably many additional constant symbols which will be needed for the tableau-method we introduce.
Whenever we talk about *new* constants, we mean constants occurring neither in the originally given set of formulas nor anywhere else in the whole tableau constructed til now. The term *world* also is to denote a new constant in this sense.
We use a tableau method which is borrowed from Bry and Yahya [BY96]. The nodes of these tableaux are sets of terms of the form $[F \ \textbf{in}\ w]$ with F as a closed M-formula and w as a world or of the form $R(w_1, w_2)$ with w_1 and w_2 being worlds. In the forthcoming we will call these terms *tableau-terms* for the sake of brevity.

Before we start with the definition of the expansion rules we need auxiliary terms:

Definition 11.1 (satisfaction of positive formulas) Let L be a set of tableau-terms and P be a positive formula. $\sigma|_{\overline{X}}$ is to be the substitution σ, restricted to the set of variables not occurring in X.

$satisfied_F([\top \ \textbf{in}\ w]) := \{([], \emptyset)\}$

If P is an atom (but not $\top$) then

$$\begin{aligned} satisfied_F([P \ \textbf{in}\ w]) :=& \{(\sigma, \emptyset) \mid [P\sigma \ \textbf{in}\ w] \in (L \cup \{[\top \ \textbf{in}\ w]\})\} \cup \\ & \{(\sigma, U \cup \{[P\sigma \ \textbf{in}\ w]\}) \mid R(x, w) \in L \text{ and } (\sigma, U) \in satisfied_F([P \ \textbf{in}\ x])\} \end{aligned}$$

$$satisfied_F([(P_1 \vee P_2) \ \textbf{in}\ w]) := satisfied_F([P_1 \ \textbf{in}\ w]) \cup satisfied_F([P_2 \ \textbf{in}\ w])$$

$$\begin{aligned} satisfied_F([(P_1 \wedge P_2) \ \textbf{in}\ w]) := \{(\sigma, (U_1 \cup U_2)) \mid & (\sigma, U_1) \in satisfied_F([P_1 \ \textbf{in}\ w]) \text{ and} \\ & (\sigma, U_2) \in satisfied_F([P_2 \ \textbf{in}\ w])\} \end{aligned}$$

$$satisfied_F([(\exists X : P) \ \textbf{in}\ w]) := \{(\sigma|_{\overline{X}}, U) \mid (\sigma, U) \in satisfied_F([P \ \textbf{in}\ w])\}$$

$$satisfied_F([(\Diamond P) \ \textbf{in}\ w]) := \bigcup_{R(w,x) \in L} satisfied_F([P \ \textbf{in}\ x])$$

Definition 11.2 (completion of a set of tableau-terms) Let L be a set of tableau-terms.
A maximal consistent augmentation of L by tableau-terms $[A \ \textbf{in}\ w]$ with A as ground atoms and $satisfied_F([A \ \textbf{in}\ w]) \neq \emptyset$ is called a *completion of* L and denoted by $\widehat{L}$

What we are interested in is the interpretation $\mathcal{I}_{\widehat{L}}$.

Lemma 11.1 Let P be a positive formula and L a set of tableau-terms. $\mathcal{I}_L$ is to be a modal interpretationa fulfilling the following properties:

- $W_L = \{w \mid [F \ \mathbf{in}\ w] \in L$ for some M-formula $F\}$
- $R_L = \{(w_1, w_2) \mid R(w_1, w_2) \in L\}$
- $\mathcal{I}_L \models L$ which is (here and in the forthcoming) a shortcut for: $\langle \mathcal{I}, w \rangle \models A$ for all ground atoms A such that $[A \ \mathbf{in}\ w] \in L$.

1. If $(\sigma, U) \in satisfied_F([P \ \mathbf{in}\ w])$ and $\mathcal{I}_L \models U$, then $P\sigma$ is ground and $\langle \mathcal{I}_L, w \rangle \models P\sigma$.
2. If $P\sigma$ is ground and $\left\langle \mathcal{I}_{\widehat{L}}, w \right\rangle \models P\sigma$, then there is a U such that: $(\sigma, U) \in satisfied_F([P \ \mathbf{in}\ w])$ and $\mathcal{I}_{\widehat{L}} \models U$.

Proof:
item 1:
Let $(\sigma, U) \in satisfied_F([P \ \mathbf{in}\ w])$ and $\mathcal{I}_L \models U$. We show that $P\sigma$ is ground and: $\langle \mathcal{I}_L, w \rangle \models P\sigma$.
Induction on P's structure:
base case of induction: P is an atom.
By definition of *satisfied* and as L contains only tableau terms $[F \ \mathbf{in}\ w]$ with F closed, $P\sigma$ is a ground atom.
Distinction of cases regarding to the emptiness of U

case 1: $U = \emptyset$.
By the definition of *satisfied*: $[P\sigma \ \mathbf{in}\ w] \in L$. As $\mathcal{I}_L \models L$: $\langle \mathcal{I}_L, w \rangle \models P\sigma$.

case 2: $U \neq \emptyset$.
Now we have: $[P\sigma \ \mathbf{in}\ w] \in U$. Because of $\mathcal{I}_L \models U$: $\langle \mathcal{I}_L, w \rangle \models P\sigma$.

induction step: That $P\sigma$ is ground follows easiliy by the induction hypothesis no matter which shape P is of. So we have to show: $\langle \mathcal{I}_L, w \rangle \models P\sigma$.
Distinction of cases according to the shape of P

case 1: $P = P_1 \vee P_2$
$(\sigma, U) \in satisfied_F([P \ \mathbf{in}\ w])$ and $\mathcal{I}_L \models U \Longrightarrow$
$((\sigma, U) \in satisfied_F([P_1 \ \mathbf{in}\ w])$ or $(\sigma, U) \in satisfied_F([P_1 \ \mathbf{in}\ w]))$ and $\mathcal{I}_L \models U \Longrightarrow$
$\langle \mathcal{I}_L, w \rangle \models P_1\sigma$ or $\langle \mathcal{I}_L, w \rangle \models P_2\sigma \Longrightarrow$
$\langle \mathcal{I}_L, w \rangle \models P\sigma$

case 2: $P = P_1 \wedge P_2$
analogous to case 1

case 3: $P = \exists X : P_1$
$(\sigma|_{\overline{X}}, U) \in \mathit{satisfied}_F([P \;\; \mathbf{in}\; w])$ and $\mathcal{I}_L \models U \Longrightarrow$
$(\sigma, U) \in \mathit{satisfied}_F([P_1 \;\; \mathbf{in}\; w])$ and $\mathcal{I}_L \models U \Longrightarrow$
$\langle \mathcal{I}_L, w \rangle \models P_1\sigma \Longrightarrow$
$\langle \mathcal{I}_L, w \rangle \models P\,(\sigma|_{\overline{X}})$

case 4: $P = \Diamond P_1$
$(\sigma, U) \in \mathit{satisfied}_F([P \;\; \mathbf{in}\; w])$ and $\mathcal{I}_L \models U \Longrightarrow$
$(\sigma, U) \in \mathit{satisfied}_F([P_1 \;\; \mathbf{in}\; w'])$, $R(w, w') \in L$ and $\mathcal{I}_L \models U \Longrightarrow$
$\langle \mathcal{I}_L, w' \rangle \models P_1\sigma$ and $(w, w') \in R_L \Longrightarrow$
$\langle \mathcal{I}_L, w \rangle \models P\sigma$

item 2:
Let $P\sigma$ be ground and $\left\langle \mathcal{I}_{\widehat{L}}, w \right\rangle \models P\sigma$. We show that there is a U such that:
$(\sigma, U) \in \mathit{satisfied}_F([P \;\; \mathbf{in}\; w])$ and $\mathcal{I}_{\widehat{L}} \models U$.
Induction on P's structure:
base case of induction: P is an atom.
By $\left\langle \mathcal{I}_{\widehat{L}}, w \right\rangle \models P\sigma$ we get with the definition of $\widehat{L}$ and $\mathcal{I}_{\widehat{L}}$, that there is a U with:
$([], U) \in \mathit{satisfied}_F([P\sigma \;\; \mathbf{in}\; w])$. Hence: $(\sigma, U) \in \mathit{satisfied}_F([P \;\; \mathbf{in}\; w])$.
We show now $U \subseteq \widehat{L}$ by induction the cardinality of U, whence $\mathcal{I}_{\widehat{L}} \models U$ holds by construction of $\widehat{L}$ and $\mathcal{I}_{\widehat{L}}$.

> *base case of induction:* $U = \emptyset$. Nothing is to show.
> *induction step:* $[P\sigma \;\; \mathbf{in}\; w] \in U$. Let $U' := U - \{[P\sigma \;\; \mathbf{in}\; w]\}$.
> By the induction hypothesis, applied to U' we get: $U' \subseteq \widehat{L}$. By the assumption $\left\langle \mathcal{I}_{\widehat{L}}, w \right\rangle \models P\sigma$ and as $\widehat{L}$ is a „maximal consistent augmentation of L …“ we get thereby: $[P\sigma \;\; \mathbf{in}\; w] \in \widehat{L}$. The proposition holds.

induction step:
Distinction of cases according to the shape of P

case 1: $P = P_1 \vee P_2$
$\left\langle \mathcal{I}_{\widehat{L}}, w \right\rangle \models P\sigma \Longrightarrow$
$\left\langle \mathcal{I}_{\widehat{L}}, w \right\rangle \models P_1\sigma$ or $\left\langle \mathcal{I}_{\widehat{L}}, w \right\rangle \models P_1\sigma \Longrightarrow$
There is a U such that $(\sigma, U) \in \mathit{satisfied}_F([P_1 \;\; \mathbf{in}\; w])$ and $\mathcal{I}_{\widehat{L}} \models U$ or
there is a U such that $(\sigma, U) \in \mathit{satisfied}_F([P_2 \;\; \mathbf{in}\; w])$ and $\mathcal{I}_{\widehat{L}} \models U \Longrightarrow$
There is a U such that $(\sigma, U) \in \mathit{satisfied}_F([P \;\; \mathbf{in}\; w])$ and $\mathcal{I}_{\widehat{L}} \models U$

case 2: $P = P_1 \wedge P_2$
analogous to case 1

case 3: $P = \exists X : P_1$
$\left\langle \mathcal{I}_{\widehat{L}}, w \right\rangle \models P\sigma \Longrightarrow$

There is a τ such that $\left\langle \mathcal{I}_{\widehat{L}}, w \right\rangle \models P_1\sigma\tau \Longrightarrow$
There is a τ and a U such that $(\sigma\tau, U) \in satisfied_F([P_1 \ \mathbf{in}\ w])$ and $\mathcal{I}_{\widehat{L}} \models U \Longrightarrow$
There is a U such that $(\sigma, U) \in satisfied_F([P \ \mathbf{in}\ w])$ and $\mathcal{I}_{\widehat{L}} \models U$

case 4: $P = \Diamond P_1$
$\left\langle \mathcal{I}_{\widehat{L}}, w \right\rangle \models P\sigma \Longrightarrow$
There is a w' such that $(w, w') \in R_L$ and $\left\langle \mathcal{I}_{\widehat{L}}, w' \right\rangle \models P_1\sigma \Longrightarrow$
There is a w' and a U with: $R(w, w') \in L$, $(\sigma, U) \in satisfied_F([P_1 \ \mathbf{in}\ w'])$, $\mathcal{I}_{\widehat{L}} \models U \Longrightarrow$ There is a U such that $(\sigma, U) \in satisfied_F([P \ \mathbf{in}\ w])$ and $\mathcal{I}_{\widehat{L}} \models U$

$\square$

Folgerung 11.1 Let P be a positive formula and L be a set of tableau-terms.
$(\sigma, \emptyset) \in satisfied_F([P \ \mathbf{in}\ w])$ if and only if $\sigma \in satisfied([P \ \mathbf{in}\ w])$.

Definition 11.3 (expansion rules) Let F, F_1, F_2 be M-formulas, P be a positve formula and w, w' be worlds. Furthermore let c and $c_1, \ldots, c_n$ be constant-symbols not occurring in the actual branch til now.
At first we have two classical expansion rules:

$\wedge$-rule:

$$\frac{[F_1 \wedge F_2 \ \mathbf{in}\ w]}{\begin{array}{c}[F_1 \ \mathbf{in}\ w] \\ [F_2 \ \mathbf{in}\ w]\end{array}}$$

$\vee$-rule:

$$\frac{[F_1 \vee F_2 \ \mathbf{in}\ w]}{[F_1 \ \mathbf{in}\ w] \mid [F_2 \ \mathbf{in}\ w]}$$

There are three rules for the handling of predicate logic quantifiers:

$\exists$-rule:

$$\frac{[\exists\{x_1, \ldots, x_n\} : F \ \mathbf{in}\ w]}{[F[c_1/x_1] \ldots [c_n/x_n] \ \mathbf{in}\ w]}$$

Frame-Puhr-rule:

$$\frac{[\forall X : (P \rightarrow F) \ \mathbf{in}\ w]}{\begin{array}{c|c}[F\sigma \ \mathbf{in}\ w] & [ne(U) \ \mathbf{in}\ w] \\ U & \end{array}}$$

if $(\sigma, U) \in satisfied_F([P \ \mathbf{in}\ w])$ and $U \neq \emptyset$

Furthermore there are two rules for the handling of modal operators:

$\Box$-rule:

$$\frac{\begin{array}{c}[\Box F \ \mathbf{in}\ w] \\ R(w, w')\end{array}}{[F \ \mathbf{in}\ w']}$$

$\Diamond$-rule:

$$\frac{[\Diamond F \ \mathbf{in}\ w]}{\begin{array}{c}R(w, c) \\ [F \ \mathbf{in}\ c]\end{array}}$$

Bemerkung: The Frame-Puhr-rule behaves actually like the Puhr-rule if $(\sigma, \emptyset) \in satisfied_F([P \ \mathbf{in}\ w])$. This means, we need no support set t o apply the Frame-Puhr-rule.

Definition 11.4 (Frame-M-tableau) Let S be a set of closed M-formulas. M-tableaux are trees with sets of closed M-formulas as their nodes. Therefore we can use the terminology existing for trees.
Let 0 be a new constant.

- The set $\{[F \ \mathbf{in}\ 0] \mid F \in S\}$ is the M-start-tableau for S.

Let T be a M-tableau for S and L a leaf in T.

- If $[F_1 \wedge F_2 \ \mathbf{in}\ w] \in L$ and $\{[F_1 \ \mathbf{in}\ w], [F_2 \ \mathbf{in}\ w]\} \not\subseteq L$ then the tree originating by appending the node $L \cup \{[F_1 \ \mathbf{in}\ w], [F_2 \ \mathbf{in}\ w]\}$ to L is a M-tableau for S.
- If $[F_1 \vee F_2 \ \mathbf{in}\ w] \in L$ and $\{[F_1 \ \mathbf{in}\ w], [F_2 \ \mathbf{in}\ w]\} \cap L = \emptyset$ then the tree originating by appending the nodes $L \cup \{[F_1 \ \mathbf{in}\ w]\}$ and $L \cup \{[F_2 \ \mathbf{in}\ w]\}$ to L is a M-tableau for S.
- If $[\forall X : (P \to F) \ \mathbf{in}\ w] \in L$, $(\sigma, U) \in \mathit{satisfied}_F([P \ \mathbf{in}\ w])$ $(U \neq \emptyset)$, $U \cup \{[F\sigma \ \mathbf{in}\ w]\} \not\subseteq L$ and this formula has never been expanded by (σ, U') with $U' \subseteq U$, then the original tree and the tree originating by appending the node $L \cup U \cup \{[F\sigma \ \mathbf{in}\ w]\}$ to L are M-tableaux for S.
- If $[\exists\{x_1, \ldots, x_n\} : F \ \mathbf{in}\ w] \in L$ and $\{[(F[d_1/x_1] \ldots [d_n/x_n]) \ \mathbf{in}\ w]\} \notin L$ for any terms $d_1, \ldots, d_n$ and $c_1, \ldots, c_n$ are constant symbols not occurring in L then the tree originating by appending the node $L \cup \{[(F[c_1/x_1] \ldots [c_n/x_n]) \ \mathbf{in}\ w]\}$ to L is a M-tableau for S.
- If $\{[\Box F \ \mathbf{in}\ w], R(w, w')\} \subseteq L$ and $[F \ \mathbf{in}\ w'] \notin L$ then the tree originating by appending the node $L \cup \{[F \ \mathbf{in}\ w']\}$ to L is a M-tableau for S.
- If $[\Diamond F \ \mathbf{in}\ w] \in L$ and there is no w' such that $\{R(w, w'), [F \ \mathbf{in}\ w']\} \subseteq L$ and c is a constant symbol not occurring in L then the tree originating by appending the node $L \cup \{R(w, c), [F \ \mathbf{in}\ c]\}$ to L is a M-tableau for S.

Remark: If $\mathcal{B}$ is a branch in a M-tableau then the union of all of its nodes is denoted by $\cup\mathcal{B}$. $\cup\mathcal{B}$ contains only closed M-formulas. But the underlying signature is the original signature extended by additional constant-symbol added because of applications of the $\Diamond$-rule in a quite obvious way. Therefore we won't mention it always.

Definition 11.5 (Satisfiability of M-tableaux)
Let S be a set of closed M-formulas, T a M-tableau for S and $\mathcal{B}$ a branch in T.

- $W_{\mathcal{B}} := \{w \mid [F \ \mathbf{in}\ w] \in \cup\mathcal{B}$ for some M-formula $F\}$
  $R_{\mathcal{B}} := \{(w, w') \mid R(w, w') \in \cup\mathcal{B}\}$
- $\mathcal{B}$ is called *satisfiable* if there is a modal interpretation $\mathcal{I} = (W, R, \Theta)$ such that

- (W, R) is a superframe of $(W_{\mathcal{B}}, R_{\mathcal{B}})$
- for all $[F\ \ \mathbf{in}\ w] \in \cup\mathcal{B}$: $\langle \mathcal{I}, w\rangle \models F$.

- T is called *satisfiable* if there is a satisfiable branch in T.

Remark: The frame $(\mathcal{W}_{\mathcal{B}}, R_{\mathcal{B}})$ is acyclic.

Lemma 11.2 Let S be a set of closed M-formulas, $\mathcal{B}$ a branch in a M-tableau for S and $w \in W_{\mathcal{B}}$.
If $[F\ \ \mathbf{in}\ w] \in \mathcal{B}$ then F is a closed M-formula.

Definition 11.6 (Fairness/Closedness) Let S be a set of closed M-formulas and T a M-tableau for S.

- A branch in T is called *saturated* if no expansion rule is applicable (any more).
- T is called *fair* if every branch of T is saturated.
- A branch $\mathcal{B}$ in T is called *closed* if $[\perp\ \ \mathbf{in}\ w] \in \cup\mathcal{B}$ for some $w \in W_{\mathcal{B}}$, otherwise *open*.
- T is called *closed* if all branches in T are closed otherwise *open* .

Lemma 11.3 Let T be a M-tableau for a set of closed M-formulas S.
If T is satisfiable in an acyclic frame by an interpretation $\mathcal{I}$ and if T' originates from T by an application of an expansion-rule then T' is satisfiable in an acyclic frame by an interpretation $\mathcal{I}'$, such that $\mathcal{I}$ and $\mathcal{I}'$ differ only with regards to names of domain symbols or world names.

Proof:
Let T be satisfiable in an acyclic frame $\mathcal{F} = (W, R)$. So there is a satisfiable branch $\mathcal{B}$ in T. Without loss of generality let L be the leaf to which one or more nodes are appended by an application of an expansion-rule such that T' originates.
Let $\mathcal{I} = (W, R, \Theta)$ a modal interpretation with (W, R) being a superframe of $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ and $D_{\mathcal{B}}(w) \subseteq D_w$ (the domain of $\Theta(w)$) for all $w \in W_{\mathcal{B}}$ such that for all closed M-formulas F:

$$[F\ \ \mathbf{in}\ w] \in \cup\mathcal{B} \Longrightarrow \langle \mathcal{I}, w\rangle \models F \tag{10}$$

We have to show that there is a branch $\mathcal{B}'$ in T' and a modal interpretation $\mathcal{I}'$ such that for all closed M-formulas F:

$$[F\ \ \mathbf{in}\ w] \in \cup\mathcal{B}' \Longrightarrow \langle \mathcal{I}', w\rangle \models F \tag{11}$$

By this proposition the lemma is proven if it is additionally shown that the other conditions of satisfiability of a tableau also hold for $\mathcal{I}'$ which however will be quite obvious in each case.
We construct $\mathcal{I}'$ directly. The branch $\mathcal{B}'$ originates by the attachment of a node L to the branch $\mathcal{B}$. L will be specified in each case of the following
Distinction of cases regarding to the expansion rule by which T' originates from T

case 1: $\wedge$-rule:
By assumption of this case we have: $[F_1 \wedge F_2 \ \textbf{in}\ w] \in L$.
$L' := L \cup \{[F_1 \ \textbf{in}\ w], [F_2 \ \textbf{in}\ w]\}$, $\mathcal{I}' := \mathcal{I}$.
By assumption 10: $\langle \mathcal{I}, w\rangle \models F_1 \wedge F_2$. Hence: $\langle \mathcal{I}, w\rangle \models F_1$ and $\langle \mathcal{I}, w\rangle \models F_2$.
Now proposition 11 holds.

case 2: $\vee$-rule:
analogous to case 1.

case 3: Frame-Puhr-rule:
By assumption of this case we have:
$[\forall X : (P \rightarrow F) \ \textbf{in}\ w] \in L$ and $(\sigma, U) \in \mathit{satisfied}_F([P \ \textbf{in}\ w])$.
By assumption 10: $\langle \mathcal{I}, w\rangle \models \forall X : (P \rightarrow F)$.
Furthermore: $\mathcal{I} \models U$ or $\mathcal{I} \not\models U$.
If $\mathcal{I} \not\models U$ then let $L' := L$, $\mathcal{I}' := \mathcal{I}$ and proposition 11 holds trivially.
But, if $\mathcal{I} \models U$ then let $L' := L \cup \{[F\sigma \ \textbf{in}\ w]\} \cup U$, $\mathcal{I}' := \mathcal{I}$.
As P is positive we have by means of lemma 11.1, item 1: $\langle \mathcal{I}, w\rangle \models P\sigma$.
So: $\langle \mathcal{I}, w\rangle \models F\sigma$ and proposition 11 holds.

case 4: $\exists$-rule:
By assumption of this case we have: $[\exists X : F \ \textbf{in}\ w] \in L$.
Let $L' := L \cup \{[F[c_1/x_1] \ldots [c_n/x_n] \ \textbf{in}\ w]\}$ for $c_1, \ldots, c_n$ being constants not occurring in L.
By assumption 10: $\langle \mathcal{I}, w\rangle \models \exists X : F$.
So there are $d_1, \ldots, d_n$ with

$$d_i \in D_w \text{ for all } i \in \{1, \ldots, n\} \text{ and } \langle \mathcal{I}, w\rangle \models F[d_1/x_1] \ldots [d_n/x_n] \qquad (12)$$

Now a new interpretation $\mathcal{I}' := (W, R, \Theta')$ can be constructed, such that, if $\Theta'(w) = (D_w, m_w)$ for all $w \in W$, then $m_w(c_i) = d_i$ for all $i \in \{1, \ldots, n\}$ in the world w. As all c_i's are perfectly new and occurr nowhere, no problems can arise by this operation. $\mathcal{I}'$ is only slightly different form $\mathcal{I}$. Proposition 11 holds immediately.

case 5: $\Box$-rule:
By assumption of this case we have: $\{[\Box F \ \textbf{in}\ w], R(w, w')\} \subseteq L$.
$L' := L \cup \{[F \ \textbf{in}\ w']\}$, $\mathcal{I}' := \mathcal{I}$.
By assumption 10: $\langle \mathcal{I}, w\rangle \models \Box F$.
As (W, R) is a superframe of $(W_{\mathcal{B}}, R_{\mathcal{B}})$ we have: $(w, w') \in R$. So: $\langle \mathcal{I}, w'\rangle \models$

F.
Now proposition 11 holds.

case 6: $\Diamond$-rule:
By assumption of this case we have: $[\Diamond F \ \textbf{in}\ w] \in L$.
Let c be a constant symbol not occurring in L.
$L' := \{R(w,c), [F \ \textbf{in}\ c], [\top \ \textbf{in}\ c]\}$.
$W_{\mathcal{B}'} = W_{\mathcal{B}} \cup \{c\}$ and $R_{\mathcal{B}'} = R_{\mathcal{B}} \cup \{(w,c)\}$.
By assumption 10 we have: $\langle \mathcal{I}, w\rangle \models \Diamond F$.
Hence there must be a world $w_F \in W$ such that:

$$(w, w_F) \in R \text{ and } \langle \mathcal{I}, w_F\rangle \models F \tag{13}$$

Again a new modal interpretation $\mathcal{I}'$ can be constructed with the only aim to rename the world 'w_F' to 'c'. So on one hand the analogon of proposition 10 holds:

$$[F \ \textbf{in}\ w] \in \cup\mathcal{B} \Longrightarrow \langle \mathcal{I}', w\rangle \models F \tag{14}$$

and on the other hand the analogon of proposition 13 holds:

$$(w, c) \in R \text{ and } \langle \mathcal{I}', c\rangle \models F \tag{15}$$

With the propositions 14 and 15 the proposition 11 holds.

□

A conclusion of the lemma is the following

Theorem 11.1 (refutation correctness) Let S be a set of closed M-formulas.
If there is a closed M-tableau for S then S is unsatisfiable in every acyclic frame.

Proof:
Let S be satisfiable in an acyclic frame. So the start-tableau for S is satisfiable in an acyclic frame. Every M-tableau for S originates by a sequence of applications of expansion rules to the start-tableau for S. Therefore every M-tableau for S must be satisfiable in an acyclic frame by lemma 11.3 and hence open.
□

Lemma 11.4 (model correctness) Let S be a set of closed M-formulas.
If T is an open fair M-tableau for S then S is satisfiable according to a special still undefined semantics in an acyclic frame.

Proof:
$\mathcal{B}$ is to be the leftmost open branch in T. We firstly describe a technique to construct

a modal Σ-interpretation $\mathcal{I}_{\mathcal{B}}$ basing on the frame $(W_{\mathcal{B}}, R_{\mathcal{B}})$ and show afterwards that it is a Frame-model of S.
We have to define a Σ-structure (D_w, m_w) for all $w \in W_{\mathcal{B}}$:
$D_w := \Big\{ t \,|\, t$ is a term occurring currently in a M-formula F with $[F \;\mathbf{in}\; w] \in \widehat{\cup\mathcal{B}} \Big\}$.
D_w contains only groundterms by construction and lemma 11.2. Possibly D_w is empty.
Furthermore we have to fix the interpretations of the function and predicate symbols:
Let f be a function symbol in Σ with arity n and $d_1, \ldots, d_n$ be arbitrary domain elements.

$$m_w(f)(d_1, \ldots d_n) := \begin{cases} f(d_1, \ldots d_n) & \text{if } f(d_1, \ldots d_n) \in D_w \\ \text{undefined} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Let p be a predicate symbol in Σ with arity n.
$m_w(p) := \Big\{ (t_1, \ldots, t_n) \mid [p(t_1, \ldots, t_n) \;\mathbf{in}\; w]) \in \widehat{\cup\mathcal{B}} \Big\}$.
For all $w \in W_{\mathcal{B}}$ we define $\Theta_{\widehat{\mathcal{B}}}(w)$ to be the interpretation consisting of the Σ-structure (D_w, m_w) and an arbitrary Σ-assignment. $\mathcal{I}_{\widehat{\mathcal{B}}} := \Big(W_{\mathcal{B}}, R_{\mathcal{B}}, \Theta_{\widehat{\mathcal{B}}} \Big)$.

Because of T's fairness $\mathcal{B}$ is saturated regarding to S. So we can be sure that in the leftmost branch the left part of the Frame-Puhr rule is applied as often as possible.

The proposition of the lemma is proven in two steps. In the first step we prove that $\Big\langle \mathcal{I}_{\widehat{\mathcal{B}}}, 0 \Big\rangle \models S$. In the second step it has to be proven that $\mathcal{I}_{\widehat{\mathcal{B}}}$ is a model in the still outstanding sense.
First step: We show the proposition by showing the following statement by induction on the structure of a M-formula F:

$$[F \;\mathbf{in}\; w] \in \cup\mathcal{B} \Longrightarrow \Big\langle \mathcal{I}_{\widehat{\mathcal{B}}}, w \Big\rangle \models F$$

base case of induction: F is an atom.
A is a ground atom because of lemma 11.2. The proposition holds by $\mathcal{I}_{\widehat{\mathcal{B}}}$'s definition.
induction step:
Distinction of cases regarding to the structure of F

case 1: $F = F_1 \wedge F_2$
$[F \;\mathbf{in}\; w] \in \cup\mathcal{B}$
$\Longrightarrow$ (saturatedness with regards to the $\wedge$-rule)
$[F_1 \;\mathbf{in}\; w] \in \cup\mathcal{B}$ and $[F_2 \;\mathbf{in}\; w] \in \cup\mathcal{B}$
$\Longrightarrow$ (induction hypothesis)
$\Big\langle \mathcal{I}_{\widehat{\mathcal{B}}}, w \Big\rangle \models F_1\sigma$ and $\Big\langle \mathcal{I}_{\widehat{\mathcal{B}}}, w \Big\rangle \models F_2\sigma$
$\Longrightarrow \Big\langle \mathcal{I}_{\widehat{\mathcal{B}}}, w \Big\rangle \models F$

case 2: $F = F_1 \vee F_2$
analogously to case 2.

case 3: $F = \forall\{x_1, \ldots, x_m\} : (P \rightarrow F')$
$[F \;\mathbf{in}\; w] \in \cup\mathcal{B}$

$\Longrightarrow$ (saturatedness with regards to the Puhr-/Frame-Puhr-rule, leftmostness of $\mathcal{B}$)
For all σ: (If $(\sigma, U) \in satisfied_F([P \textbf{ in } w])$ and $U \subseteq \mathcal{B}$, then: $[F'\sigma \textbf{ in } w] \in \mathcal{B}$)
$\Longrightarrow$ (base case of induction)
For all σ: $\Big($If $(\sigma, U) \in satisfied_F([P \textbf{ in } w])$ and $\mathcal{I}_{\widehat{\mathcal{B}}} \models U$, then: $[F'\sigma \textbf{ in } w] \in \mathcal{B}\Big)$
$\Longrightarrow$ (lemma 11.1, item 2, $P\sigma$ is ground)
For all σ: $\Big($If $\Big\langle \mathcal{I}_{\widehat{\mathcal{B}}}, w \Big\rangle \models P\sigma$, then: $[F'\sigma \textbf{ in } w] \in \mathcal{B}\Big)$
$\Longrightarrow$ (induction hypothesis)
For all σ: $\Big($If $\Big\langle \mathcal{I}_{\widehat{\mathcal{B}}}, w \Big\rangle \models P\sigma$, then: $\Big\langle \mathcal{I}_{\widehat{\mathcal{B}}}, w \Big\rangle \models F'\sigma\Big)$
$\Longrightarrow \Big\langle \mathcal{I}_{\widehat{\mathcal{B}}}, w \Big\rangle \models F$

case 4: $F = \exists\{x_1, \ldots, x_m\} : F'$
$[F \textbf{ in } w] \in \cup\mathcal{B}$
$\Longrightarrow$ (saturatedness with regards to the $\exists$-rule)
There are constants $c_1, \ldots, c_m$ with: $[F'[c_1/x_1] \ldots [c_m/x_m] \textbf{ in } w] \in \cup\mathcal{B}$
$\Longrightarrow$ (definition of $D_{\widehat{\mathcal{B}}}(w)$, induction hypothesis)
There are constants $c_1, \ldots, c_m \in D_{\widehat{\mathcal{B}}}(w)$ with: $\Big\langle \mathcal{I}_{\widehat{\mathcal{B}}}, w \Big\rangle \models F'[c_1/x_1] \ldots [c_m/x_m]$
$\Longrightarrow \Big\langle \mathcal{I}_{\widehat{\mathcal{B}}}, w \Big\rangle \models F$

case 5: $F = \Box F'$
$[F \textbf{ in } w] \in \cup\mathcal{B}$
$\Longrightarrow$ (saturatedness with regards to the $\Box$-rule)
For all $w' \in W_{\mathcal{B}}$: (If $R(w, w') \in \cup\mathcal{B}$, then $[F' \textbf{ in } w'] \in \cup\mathcal{B}$)
$\Longrightarrow$ (definition of $R_{\mathcal{B}}$)
For all $w' \in W_{\mathcal{B}}$: (If $(w, w') \in R_{\mathcal{B}}$, then $[F' \textbf{ in } w'] \in \cup\mathcal{B}$)
$\Longrightarrow$ (induction hypothesis)
For all $w' \in W_{\mathcal{B}}$: $\Big($If $(w, w') \in R_{\mathcal{B}}$, then $\Big\langle \mathcal{I}_{\widehat{\mathcal{B}}}, w' \Big\rangle \models F'\Big)$
$\Longrightarrow \Big\langle \mathcal{I}_{\widehat{\mathcal{B}}}, w \Big\rangle \models F$

case 6: $F = \Diamond F'$
analogously to case 5

Now the first step is shown.

The second step is outstanding.

$\Box$